АНАЛИЗ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ИНТЕРВАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Джомартова Ш. А.
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Казахстан,
jomartova@mail.ru

Рассматривается система управления, описываемая линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = Ax + Bu\ . \tag{1}$$

где A - $n \times n$ - постоянная матрица, B – n - мерный постоянный вектор, x – n -мерный вектор состояния системы, u - скалярное управление.

На управление накладывается следующее ограничение

$$l_1 \le u(t) \le l_2, \quad t \in [0, T]. \tag{2}$$

Ставится задача, определить существует ли управление, удовлетворяющее ограничению (2) и переводящее систему (1) из начального состояния

$$x(0) = x_0 \tag{3}$$

в конечное заданное состояние

$$x(T) = x_1 \tag{4}$$

за фиксированное время T .

Исследование поставленной задачи при наличии ограничений на управление вида (2) представляет определенный интерес, так как до сих пор не существуют эффективных критериев [1]. Кроме того, результаты могут быть использованы при решении практических задач оптимального управления системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями с закрепленными концами и ограничениями на управляющие воздействия. В частности, уравнениями вида (1) могут описываться робототехнические или электроэнергетические системы, где коэффициенты матрицы A и вектора B определяются через параметры (такие как вес, метрические характеристики, инерционность и т.п.), которые обычно вычисляются с некоторой погрешностью.

В последние годы получило развитие такое направление вычислительной математики как интервальная, оперирующая не с числами, а интервалами (которые позволяют учитывать погрешности задания исходных данных) [2].

Далее применим результаты интервальной математики к исследуемой задаче управляемости.

Пусть $\Phi(t,\tau) = \theta(t) * \theta^{-1}(\tau)$, где $\theta(t) = \exp(At)$ - фундаментальная матрица решений системы, описываемой однородным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = Ax\ . \tag{6}$$

Введем обозначения:

$$u = v + \frac{l_1 + l_2}{2},\ L = \frac{l_2 - l_1}{2}.$$

Тогда систему (1) можно представить в виде

$$\dot{x} = Ax + B\frac{l_1 + l_2}{2} + Bv\,, \tag{7}$$

где $$-L \le v(t) \le L, \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{8}$$

Решение уравнения (7) можно представить в виде

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \frac{l_1 + l_2}{2}\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B\, d\tau + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)Bv(\tau)\, d\tau\,. \tag{9}$$

Введем обозначения

$$y_1 = x_1 - \Phi(T, 0)x_0 - \frac{l_1 + l_2}{2}\int_0^T \Phi(T, \tau)B\, d\tau,$$

$$f(\tau) = \Phi(T, \tau)B.$$

Тогда задача управляемости сводится к существованию решения интегрального уравнения

$$y_1 = \int_0^T f_1(\tau)v(\tau)\, d\tau, \tag{10}$$

удовлетворяющего условию (8).

Для решения поставленной задачи применим результаты интервального анализа [2].

Заменим интеграл в правой части (10) рядом

$$h\sum_{i=1}^{n} f_i v_i$$

где $$n = \frac{T}{h}, \quad h \ge 0, \quad -L \le v_i \le L, \quad i = \overline{1, n}.$$

Обозначим через $\overline{f_i} = (f_i, 0)$ – интервал с центром в f_i и радиусом 0, $\bar{v}_i = (0, L)$ - интервал от $-L$ до L [2].

Пусть $i = 1$. Вычислим $\overline{f_1}\overline{v_1} = (0, |f_1 L|)$ - интервал с центром в точке 0 и радиуса $|f_1 * L|)$, здесь все арифметические операции выполняются по правилам определенных для интервальных вычислений [2].

Очевидно множество

$$\{hf_1 v_1 \;|\forall\, v_1 \in (-L, L)\}$$

совпадает с интервалом

$$h(0, |f_1 L|) \text{ для } \quad \forall h \ge 0.$$

Методом математической индукции можно показать, что множество

$$\{h\sum_{i=1}^{n} f_i v_i \;|\forall\, v_i \in (-L, L), i = \overline{1, n}\}$$

совпадает с интервалом

$$h(0, \sum_{i=1}^{n}|f_i L|) \text{ , для } \forall h \ge 0\,.$$

Отсюда видно, что множество

$$\left\{ \int_0^T f(\tau)v(\tau)\, d\tau \mid v(t) \in (-L, L), \forall t \in [0, T] \right\}$$

совпадает с интервалом $y_2 = \int_0^T f(\tau)\bar{v}\, d\tau$, где все арифметические операции выполняются с помощью интервальных вычислений [2].

Тем самым доказана следующая теорема.

<u>Теорема.</u> Для того чтобы система (7)-(8) была управляемой необходимо и достаточно, чтобы вектор y_1 принадлежал интервальному вектору y_2.

Для численного моделирования на языке Паскаль разработано программное обеспечение, реализующее вычисления предложенного критерия и использующее библиотеку интервального вычисления [3].

<u>Лемма</u> (Гронуолла-Белмана) [4]. Пусть скалярные непрерывные функции $x(t)$ и $g(t) \ge 0$ удовлетворяют неравенству

$$x(t) \le \alpha(t) + \int_0^t g(s)x(s)ds\,,\ t \ge 0\,,$$

где $\alpha(t)$ – некоторая неубывающая функция. Тогда

$$x(t) \le \alpha(t)\exp\left(\int_0^t g(s)ds\right).$$

Применяя лемму Гронуолла-Белмана к задаче (1) и (4) получим следующее неравенство

$$\|x(t_1)\| \le (\|x(t_0)\| + \int_0^{t_1} \|B(\tau)\| u(\tau)d\tau)\exp(\int_0^{t_1} \|A(\tau)\| d\tau)\,. \tag{11}$$

Выберем в качестве нормы вектора $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ и нормы матрицы $\|A\| = \max_{1\le j\le n} (\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|)$.

<u>Пример 1.</u> В качестве примера рассматривается система второго порядка

$$\dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_2 + u, \tag{12}$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - u,$$

при частичных условиях

$$x_0 = (1, 1), \tag{13}$$
$$t_0 = 0,\ t_1 = 1.$$

Условия на управление и конечную точку будут варьироваться.

а) пусть $-1.5 \le u(t) \le 1.0, \quad t \in [0, 1].$ (14)

Вычислим значение интервального вектора $y_2 = \begin{pmatrix} (39.97, 17.99) \\ (9.33,\ 7.50) \end{pmatrix}$.

Подставляя значения параметров примера в (11) получим $\|x(t_1)\| \le 4\exp(4) \approx 218{,}3$.

Следовательно, при $x_1 = (109, 110)^*$ по лемме Гроноулла-Белмана система (12)-(14) не управляема, т.е. не существует управление, удовлетворяющее ограничению $-1.5 \le u(t) \le 1.0$ и переводящее систему за время 1 из точки $x_0 = (1, 1)^*$ в точку $x_1 = (109, 110)^*$.

Применяя предложенный критерий, получим, что вектор $x_1 = (109, 110)^*$ не принадлежит интервальному вектору y_2, так как 109>39.97+17.99 и 110>9.33+7.5, т.е. отсутствует управляемость по обеим переменным.

б) в качестве точки x_1 возьмем решение задачи Коши (12)-(13) в момент времени t_1 при управлении $u \equiv 0$, которая удовлетворяет ограничению (14): $x_1 = (41.13, 9.43)$.

Применяя предложенный критерий, получим, что вектор x_1 принадлежит интервальному вектору y_2, так как 39.97-17.99<41.13<39.97+17.99 и 9.33-7.50<9.43<9.33+7.50, т.е. система управляема.

<u>Пример 2.</u> Рассматривается система уравнений третьего порядка вида (1), описывающая состояние цепей электромеханической следящей системы автоматического манипулятора [5], где $x = x(t) = (i_{\text{ÿ}}(t), \Omega(t), \theta(t))^*$ – вектор состояния системы, $u = u(t) = (\Omega_0(t), \theta_0(t))^*$ – управляющий входной вектор-сигнал системы, с ограничениями

$$l_i^1 \le u_i \le l_i^2,\ i = \overline{1, 2},\ t \in [t_0, t_1], \tag{15}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\left(\dfrac{1}{T_{\text{ÿ}}} + \dfrac{k_{\text{îñ}} k_{\text{ôì}} R_{\text{ø}}}{L_{\text{ÿ}}}\right) & -\left(\dfrac{k_e}{L_{\text{ÿ}}} + \dfrac{k_1 k_{\text{ôì}} k_{\text{ò}}}{L_{\text{ÿ}}}\right) & -\dfrac{k_1 k_{\text{ôì}} k_{\text{ï}}}{L_{\text{ÿ}}} \\ \dfrac{k_{\text{ì}}}{J} & -\dfrac{1}{\text{Ò}_{\text{ì}}} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\dfrac{k_1 k_{\text{ôì}} k_{\text{ã}}}{L_{\text{ÿ}}} & \dfrac{k_1 k_{\text{ôì}} k_{\text{ï}}}{L_{\text{ÿ}}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Численные значения коэффициентов матриц A и B зависят от параметров и структуры следящей системы.

Пусть

$$x_0 = (1, 1, 1), \tag{16}$$

$$T = 1,$$
$$\text{Ò}_{\text{ÿ}} = 2,\ L_{\text{ÿ}} = 3,\ \hat{e}_{\text{îñ}} = 1,\ \hat{e}_{\text{ôì}} = 1.5,\ R_{\text{ø}} = 1.1,\ \hat{e}_{\text{å}} = 2.1,$$
$$\hat{e}_1 = 0.1,\ \hat{e}_{\text{ò}} = 2,\ \hat{e}_{\text{ï}} = 4,\ \hat{e}_{\text{ã}} = 6,\ J = 5,\ \text{Ò}_{\text{ì}} = 4.$$

Тогда система уравнений (1) представляется в виде

$$\dot{i}_{я} = -1.05 i_{я} - 0.8\Omega - 3.0\theta - 3.0\Omega_0 + 2.0\theta_0,$$
$$\dot{\Omega} = 0.4 i_{я} - 0.25\Omega,$$
$$\dot{\theta} = \Omega + \theta.$$

Зададим ограничение на управляющий вектор $u = (\Omega_0(t), \theta_0(t))^*$ в виде

$$-0.4 \le \Omega_0 \le 0.6, \quad t \in [0, 1]. \tag{17}$$

$$-0.25 \le \theta_0 \le 1.25, \quad t \in [0,1].$$

Вычислим значение интервального вектора $y_2 = \begin{pmatrix} (4.94 & 12.29) \\ (0.14 & 1.62) \\ (4.33 & 5.87) \end{pmatrix}.$

Подставляя значения параметров примера в (11) получим

$$\|x(1)\| \le (3 + 3 * 1.85)\exp(4) \approx 466.6 .$$

Тогда при $x(1) = (160, 160, 150)^*$ система не управляема, т.е. не существует управление переводящее систему за время $T = 1$ из точки $(1,1,1)^*$ в точку $x(1) = (160, 160, 150)^*$.

Применяя предложенный критерий, получим, что вектор $x(1) = (160, 160, 150)^*$ не принадлежит интервальному вектору y_2, так как 160>4.94+12.29, 160>0.14+1.62 и 150>4.33+5.87, т.е. отсутствует управляемость по трем переменным.

В качестве точки $x(1)$ возьмем решение задачи Коши (1) в момент времени T при управлении $u \equiv 0$, которая удовлетворяет ограничению (17), тогда $x(1) = (-4.87, 0.12, 4.1)^*$.

Применяя предложенный критерий, получим, что вектор $x(1)$ принадлежит интервальному вектору y_2, так как 4.94-12.29<-4.87<4.94+12.29, 0.14-1.62<0.12<0.14+1.62 и 4.33-5.87<4.1<4.33+5.87, т.е. система управляема.

Результаты численных расчетов показывают эффективность предложенного критерия управляемости и возможность их применения в практических приложениях.

Литература

1. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. – М.: Наука, 1971.
2. Шокин Ю.И. Интервальный анализ. – Новосибирск: Наука, 1986.
3. Джомартова Ш.А. «Практические» интервальные вычисления // Вестник НАН РК. – 2002. – №2. – С.41-46.
4. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981.
5. Черноруцкий Г.С., Сибрин А.П., Жабреев В.С. Следящие системы автоматических манипуляторов. – М.: Наука, 1987.