ОБ ОДНОЙ ПРОЦЕДУРЕ ИССЛЕДОВАНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНО-ЗАДАННЫМ ОБЪЕКТОМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Пащенко Г.Н.
ДГП Институт проблем информатики и управления, г. Алматы, Республика Казахстан, e-mail: galina_pashenko@mail.ru

Первые результаты в теории устойчивости были получены при помощи построения функций Ляпунова специального вида.

Близкими к проблематике анализа интервально-заданных систем в настоящее время, являются работы Шашихина /1,2/, в которых на основе прямого метода Ляпунова рассматривается проблема анализа и синтеза робастных систем управления.

В данной работе предлагается процедура исследования асимптотической устойчивости интервально-заданного объекта с запаздыванием на основе интервального аналога прямого метода Ляпунова с использованием скалярно-оптимизационной функции.

Рассмотрим интервально-заданный объект с запаздыванием, математическая модель, которого описывается системой интервальных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{A}_1 x(t-\tau), \tag{1}$$

$$x(t+\upsilon) = \varphi(\upsilon), \qquad -\tau \le \upsilon \le 0,$$

где $t \in [t_0, \infty) \equiv J(t_0)$; $x(t) \in R^n$ – вектор состояний объекта; $x(t-\tau) \in R^n$ - вектор состояний объекта, запаздывающий на время τ, $\tau > 0$, $\tau = const < \infty$ - величина запаздывания; $\varphi(\upsilon) \in C([-\tau,\ 0], R^n)$ – непрерывная, ограниченная начальная векторная функция; $C([-\tau,\ 0], R^n)$ - пространство непрерывных функций $\varphi(\upsilon)$ на отрезке $[-\tau,\ 0]$ с нормой $\|\varphi(\upsilon)\|_\tau = \max\limits_{-\tau\le\upsilon\le 0}\|\varphi(\upsilon)\|$; $\|\varphi(\upsilon)\|$ – евклидова норма вектора $\varphi(\upsilon)$, $\|\varphi(\upsilon)\| < \nu(t_0)$, $\nu \in [t-\tau,\ t]$, $\nu(t_0)$ – некоторое число; $\mathbf{A}, \mathbf{A_1} \in \mathrm{I}\mathbf{R}^{nxn}$ – постоянные интервальные матрицы, $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{\rm ij}), \mathbf{a}_{\rm ij} = \left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\right]$, $1 \le i,j \le n$, $\mathbf{A_1} = (\mathbf{a}_{(1)\rm ij}), \mathbf{a}_{(1)\rm ij} = \left[\underline{a}_{(1)ij}, \overline{a}_{(1)ij}\right]$, $1 \le i,j \le n$ $\mathrm{I}\mathbf{R}$ – множество всех вещественных интервалов, $I\mathbf{R} = \left\{x \in \mathbf{R} \;\middle|\; \underline{x} \le \mathbf{x} \le \overline{x},\ \underline{x}, \overline{x} \in \mathbf{R}\right\}$, $\underline{a}_{ij}$, $\overline{a}_{ij}$ – нижние и верхние границы значений элементов матрицы $\mathbf{A}$, $\underline{a}_{ij(1)}$, $\overline{a}_{ij(1)}$ - нижние и верхние границы значений элементов матрицы $\mathbf{A_1}$.

Всюду в дальнейшем математическую модель вида (1) будем понимать как семейство математических моделей стационарных объектов управления с запаздыванием, т.е.

$$\left\{\ \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-\tau), \middle|\ (\exists A \in \mathbf{A})(\exists A_1 \in \mathbf{A}_1)\ \right\}.$$

Пусть существует интервальная, положительно-определенная функция $\mathbf{V}$, причем для всех $V \in \mathbf{V}$ выполняются следующие условия

$$V = V(t,x),\ V : J\boldsymbol{x}R^n \to R^+,$$

$$V(t,0) = 0 \text{ для всех } t \in J,\ V \in C(J\boldsymbol{x}R^n). \tag{2}$$

Пусть $V \in C(J\boldsymbol{x}R^n)$ – некоторая функция, $W: R^n \to R^+$, $W \in C(R^+)$ непрерывная, монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условию $W(0)=0$. Если W является строго монотонно возрастающей функцией, то она принадлежит к классу K, выделяемым Ханом /3/.

Пусть существуют функции W_1, $W_2 \in K$ такие, что для любых (t,x) выполнены условия

а) $V(t,x) \le W_1(\|x\|)$,

б) $V(t,x) \ge W_2(\|x\|)$, причем $W_2(r) \to \infty$ при $r \to \infty$. (3)

В качестве кандидата на функцию Ляпунова возьмем интервально-значную функцию

$$\mathbf{V}(x) = x^T \mathbf{H} x, \tag{4}$$

являющуюся естественным расширением квадратичной формы

$$\mathbf{V}(x) = [\underline{V}, \overline{V}], \tag{5}$$

где

$$\underline{V} = x^T \underline{H} x, \tag{6}$$

$$\overline{V} = x^T \overline{H} x. \tag{7}$$

Здесь $\mathbf{H} \in \mathrm{I}\mathbf{R}^{n\times n}$ - вещественная симметрическая, положительно-определенная интервальная матрица $\mathbf{H} = \mathbf{H}^T \rhd 0$, т.е. $\forall H \in \mathbf{H}$ выполняется $H = H^T > 0$.

Аналогом производной функции Ляпунова (4), взятой в силу (1) является интервальная скалярно -оптимизационная функция $\mathbf{R}(x)$ /4/

$$\mathbf{R}(x) = sup\{\dot{\mathbf{V}}(x) | \mathbf{V}(x(\upsilon)) \le \mathbf{V}(x),\ t-\tau \le \upsilon \le t, x(t) = x\}. \tag{8}$$

То есть, скалярно-оптимизационная функция $\mathbf{R}(x)$ определяется наибольшим значением интервального функционала $\dot{\mathbf{V}}(x)$ на ограниченном множестве интегральных кривых, вдоль которых интервальная функция $\mathbf{V}(x)$ убывает.

В правой части выражения для $\mathbf{R}(x)$ присутствует фундаментальное условие V(x(υ))≤ V(x), t-$\tau \le \upsilon \le$t, (принцип Разумихина) существенно упрощающее нахождение производной функции Ляпунова для дифференциальных матричных уравнений и играющее определяющее значение в вопросах исследования устойчивости систем с запаздыванием.

При выбранной функции Ляпунова (4) интервально – заданный объект с запаздыванием (1) является асимптотически устойчивым, если выполняется условие

$$\mathbf{V}(x) > 0,\quad \mathbf{R}(x) < 0,\ \forall\ x(\varphi(\upsilon)) \ne 0.$$

Вычислим полную производную от интервальной функции Ляпунова (4) в силу системы (1).

Тогда выражение для интервальной скалярно – оптимизационной функции примет следующий вид

$$\mathbf{R}(x) = sup\{x^T(\mathbf{A}^T\mathbf{H} + \mathbf{H}\mathbf{A})x(t) + 2x^T\mathbf{H}\mathbf{A}_1 x(t-\tau) \| x(t-\tau) | \le |x(t)|. \tag{9}$$

или $$\mathbf{R}(x) = x^T(\mathbf{A}^T\mathbf{H} + \mathbf{H}\mathbf{A})x(t) + 2x^T\mathbf{H}\mathbf{A}_1 S^x x(t), \tag{10}$$

где S^x - знаковая диагональная матрица размерности (nxn), $\mathrm{S^x} = \mathrm{diag}(\mathrm{sgn}\, \mathrm{x_i}(t),\ \mathrm{i} = \overline{1,n})$.

Оценим второе слагаемое в выражении (10) согласно /5/

$$2x^T \mathbf{HA}_1 S^x x(t) \le x^T \mathbf{HA}_1 \mathbf{A}_1^T \mathbf{H} x(t) + x^T S^x S^x x(t) \le$$
$$\le x^T \mathbf{HA}_1 \mathbf{A}_1^T \mathbf{H} x(t) + x^T E x(t), \tag{11}$$

где E – единичная матрица,

тогда

$$\mathbf{R}(x) = x^T (\mathbf{A}^T \mathbf{H} + \mathbf{HA} + \mathbf{HA}_1 \mathbf{A}_1^T \mathbf{H} + E) x(t). \tag{12}$$

Задача исследования свойства асимптотической устойчивости интервально – заданного объекта управления с запаздыванием (1) сводится к решению интервального матричного уравнения вида

$$\mathbf{A}^T \mathbf{H} + \mathbf{HA} + \mathbf{HA}_1 \mathbf{A}_1^T \mathbf{H} = -\mathbf{Q}, \tag{13}$$

где $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}' + E$ интервальная, положительно – определенная матрица, т.е. для всех $Q \in \mathbf{Q},\ Q^T = Q > 0.$

Рассмотрим случай, когда матрицы $A,\ A_1, Q$ - точечные.

Для рассмотренного случая математическая модель на основе (1) будет иметь вид:

$$A^T H + HA + HA_1 A_1^T H = -Q, \tag{14}$$

Решение поставленной задачи состоит в построение точечной симметрической положительно-определенной матрицы H, $H = H^T > 0$, как решение точечного матричного уравнения Риккати (14).

Для определения точечной матрицы H рассмотрим алгоритм, который состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Для уравнения (14) по известным матрицам A, A_1, Q на основе аналога соотношения Басса /6/ построим блочную матрицу Эйлера размерности (2n x 2n) в виде:

$$F = \left| \begin{array}{ccc} A & \vdots & A_1 A_1^T \\ \cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ -Q & \vdots & A^T \end{array} \right| \tag{15}$$

Шаг 2. Преобразуем матрицу F к верхней треугольной форме Хессенберга $\overline{F}$ /6/.

Шаг 3. Преобразуем матрицу $\overline{F}$, которая имеет верхнюю форму Хессенберга в треугольную форму Шура /6/.

Приведем матрицу F_{n-2} в форму Шура. Приведение осуществляется с использованием QR-алгоритма.

Процесс заканчивается в том случае, когда оказываются нулевыми все элементы некоторой матрицы $G^{(l)}$, лежащие ниже диагонали, выходящей из верхнего левого угла. Обозначим матрицу $G^{(l)}$ через R (если матрица квадратная, то R будет верхней треугольной):

$$R = P^{(l)} P^{(l-1)} \ldots P^{(1)} G \tag{16}$$

Поскольку $P = P^T$, то выражение (16) можно переписать в виде:

$$G = P^{(1)} P^{(2)} \ldots P^{(l)} R.$$

Обозначим через Q матрицу вида:

$$Q = P^{(1)} P^{(2)} \ldots P^{(l)}.$$

В результате придем к представлению:

$$G = QR,$$

которое называется QR - разложением.

Далее матрицы Q и R перемножаются в обратном порядке:

$$G_r = RQ.$$

Матрица G_r ортогонально - подобна матрице G :

$$G_r = Q^T G\,Q\ .$$

Матрицу Q^T можно построить как произведение $n-1$ вращений.

То есть матрица Q^T представляется в виде:

$$Q^T = R_{n,n-1} \ldots R_{23} R_{12}\,.$$

По условию теоремы Шура , любая необязательно квадратная матрица унитарно эквивалентна треугольной матрице в которой собственные значения диагональных блоков представляют собой собственные значения для этой квадратной матрицы.

Шаг 4. Строится унитарная матрица U /6/, которая обеспечивает вещественную треугольную форму Шура S для матрицы F. Матрица U равна $U = \prod_k Q_k$, $S = UFU^*$ и ее можно представить в блочном виде:

$$U = \begin{vmatrix} U_{11} & \vdots & U_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ U_{21} & \vdots & U_{22} \end{vmatrix}.$$

где * - знак, обозначающий операцию транспонирования для случая, когда элементы матрицы F вещественны. В случае комплексных элементов знак * обозначает транспонирование и замену этих элементов на комплексно-сопряженные.

Шаг 5. Согласно методам решения матричных уравнений /6/ точечную матрицу H можно определить из выражения вида:

$$H = U_{21} U_{11}^{-1}\,. \tag{17}$$

Шаг 6. Матрица H проверяется на условие положительной определенности.

В случае, если H будет удовлетворять условиям положительной определенности, то система (1) будет асимптотически устойчивой.

Литература:

1. Шашихин В.Н. Робастная стабилизация интервальных динамических систем // Известия Академии наук. Теория и системы управления.-1992. N6.–С. 47–53.
2. Шашихин В.Н. Синтез робастного управления для интервальных крупномасштабных систем с последействием // Автоматика и телемеханика. –1997. N12.– С. 164–174.
3. Кунцевич А.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функции Ляпунова. М.: Наука,1977. – 400 с.
4. Разумихин Б.С. Устойчивость эредитарных систем. – М.: Наука, 1988. –122 с.
5. Цыкунов А.М. Адаптивное управление объектами с последействием. – М.: Наука, 1984. – 192 с.
6. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений: ортогональные методы. М.: Наука, 1984. –192 с.