МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И ИДЕНТИФИКАЦИИ

К ГЛОБАЛЬНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

С.А. Айсагалиев, Б.К. Абенов
Институт математики и механики Каз НУ им. аль-Фараби
e-mail: aisagaliev@kaznu.kz, babenov@mail.ru

Предлагаются новые эффективные критерии глобальной асимптотической устойчивости динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством на основе оценки несобственных интегралов. Работа является продолжением научных исследований [1-5].

Постановка задачи. Исследуются свойства решений дифференциального уравнения следующего вида

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma),\ \dot{\sigma} = Cx + R\varphi(\sigma),\ x(0) = x_0,\ \ \sigma(0) = \sigma_0,\ t \in I = [0,\infty), \tag{1}$$

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \left\{ \varphi(\sigma) \in C^1\left(R^1, R^1\right) \middle| \mu_1 < \frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} < \mu_2,\ \varphi(\sigma) = \varphi(\sigma + \Delta),\ \forall\sigma,\ \sigma \in R^1 \right\}, \tag{2}$$

где A,B,C,R – постоянные матрицы порядков $n\times n,\ n\times 1,\ 1\times n,\ 1\times 1$ соответственно, Δ- период функции $\varphi(\sigma),\ \mu_1,\mu_2$- заданные числа, $\operatorname{Re}\lambda_1(A) < 0,\ j = \overline{1,n},\ \lambda_1(A)$- собственные значения матрицы А. Стационарное множество Λ системы (1), (2) равно

$$\Lambda = \left\{ \left(x_*, \sigma_*\right) \in R^{n+1} \middle| x_* = 0,\ \varphi\left(\sigma_*\right) = 0 \right\}$$

Решены следующие задачи:

Задача 1. Найти новый эффективный критерий глобальной асимптотической устойчивости стационарного множества Λ системы (1), (2) для случая, когда $\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta}\varphi(\xi)d\xi = 0$ для любого $\sigma,\sigma \in R^1$;

Задача 2. Найти новый эффективный критерий глобальной асимптотической устойчивости стационарного множества Λ системы (1), (2) для случая, когда $\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta}\varphi(\xi)d\xi = \alpha \neq 0$ для любого $\sigma,\sigma \in R^1$.

Неособое преобразование. Для формулировки основных результатов целесообразно исходную систему (1) путем неособого преобразования привести к специальному виду.

Пусть $\Delta(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ – характеристический полином матрицы A. Как следует из теоремы Гамильтона-Кэли, $\Delta(A) = 0$. Тогда $A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \ldots - a_1 A - a_0 I_n$, где I_n - единичная матрица порядка $n\times n$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть постоянный вектор $\theta^* \in R^n$ такой, что

$$\theta B = 0,\ \theta AB = 0, \ldots, \theta A^{n-2}B = 0, \theta A^{n-1}B \neq 0, \tag{3}$$

где $(*)$- знак транспонирования, θ - вектор- строка.

Тогда первое уравнение из (1) может быть представлено в виде

$$\begin{gathered} \dot{y}_1 = y_2,\ \dot{y}_2 = y_3, \ldots, \dot{y}_{n-1} = y_n, \\ \dot{y}_n = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \ldots - a_{n-1}y_n + \theta A^{n-1}B\varphi(\sigma), \end{gathered} \tag{4}$$

где $y_1 = \theta x,\ y_2 = \theta Ax, ...,\quad y_n = \theta A^{n-1}x,\quad x = x(t),\quad y_i = y_i(t),\ i = \overline{1,n}.$

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1, и пусть, кроме того, ранг матрицы

$$R = \left\| \theta^*,\ A^*\theta^*, ..., A^{*n-1}\theta^* \right\| \tag{5}$$

порядка nxn равен n. Тогда:

1) существует вектор-строка $\beta = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{n-1})$ такой, что

$$\dot{\sigma} = \beta_0 y_1 + \beta_1 y_2 + ... + \beta_{n-1} y_n + R\varphi(\sigma); \tag{6}$$

2) если $y_1 = \theta x = 0,\ y_2 = \theta Ax = 0, ..., y_n = \theta A^{n-1}x = 0$, то $x = 0.$

Из лемм 1,2 следует, что, если выполнены равенства (3) и ранг $R = n$, то система (1) равносильна системе (4), (6). Более того, из $\lim\limits_{t\to\infty} y_i(t) = 0,\ i = \overline{1,n}$ следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0.$

Свойства решений. Представляет интерес исследование общего свойства решения системы (1), (2), а также систем (4), (6), (2).

Теорема 1. Пусть матрица A- гурвицева, т.е. $\operatorname{Re}\lambda_j\ (A) < 0,\ j = \overline{1,n}$, функция $\varphi(\sigma) = \varphi(\sigma + \Delta) \in \Phi_0$, и пусть, кроме того, выполнены равенства (3) и ранг $R = n$.

Тогда верны оценки

$$|x(t)| \le l_1,\ |\dot{x}(t)| \le l_2,\ t \in I = [0,\infty), \tag{7}$$

$$|y_i(t)| \le m_{i1},\ |\dot{y}_i(t)| \le m_{i2},\ i = \overline{1,n},\ t \in I, \tag{8}$$

$$|\dot{\sigma}(t)| \le c_0,\ \forall t,\ t \in I, \tag{9}$$

где $l_1 = const < \infty,\ l_2 = const < \infty,\ m_{i1} = const < \infty,\ m_{i2} = const < \infty,\ c_0 = const < \infty.$

Кроме того, функции $x(t),\ y_i(t),\ i = \overline{1,n},\ \sigma(t),\ t \in I$ – равномерно непрерывны.

Теорема 2. Пусть выполнены условия леммы 1,2. Тогда вдоль решения системы (4), (6) верны тождества

$$\varphi(\sigma(t)) = \chi^{-1}[\omega(t) + a_0 y_1(t) + a_1 y_2(t) + ... + a_{n-1} y_n(t)],\ t \in I, \tag{10}$$

$$\dot{\sigma}(t) = \delta_0\omega(t) + \delta_1 y_1(t) + \delta_2 y_2(t) + ... + \delta_n y_n(t),\ t \in I, \tag{11}$$

$$\xi(t) = \frac{d\varphi(\sigma(t))}{dt} = \chi^{-1}[\dot{\omega}(t) + a_0 y_2(t) + a_1 y_3(t) + ... + a_{n-1}\omega(t)],\ t \in I, \tag{12}$$

где $\omega(t) = \dot{y}_n(t),\ \dot{\omega}(t) = \ddot{y}_n(t),\ t \in I,\ \delta_0 = R\chi^{-1},\ \chi = \theta A^{n-1}B,\ \delta_j = \beta_{j-1} + R\chi^{-1}a_{j-1},\ j = \overline{1,n}.$

Несобственные интегралы. На основе тождеств (10)-(12) и включения $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ могут быть получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы (4), (6).

Теорема 3. Пусть выполнены условия лемм 1,2, матрица A-гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любой величины $\tau_1 > 0,$ вдоль решения системы (4), (6) несобственный *интеграл*

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{T\to\infty}\int_0^T [\mu_1\dot{\sigma}(t) - \xi(t)]\tau_1[\xi(t) - \mu_2\dot{\sigma}(t)]dt = \\ &= \lim_{T\to\infty}\int_0^T [M_0\dot{\omega}^2(t) + M_1\omega^2(t) + M_2 y_1^2(t) + ... + M_{n+1} y_n^2(t)]dt + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_1(t)\right]dt \ge 0, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_1(t)\right]dt\right| = \left|\lim_{T\to\infty}F_1(T) - F_1(0)\right| < \infty. \tag{14}$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрица A-гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любых величин $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{n+1}$, вдоль решения системы (4), (6) несобственный интеграл

$$I_2 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\gamma_0\dot{\omega}(t) + \gamma_1\omega(t) + \sum_{i=1}^{n}\gamma_{i+1}y_i(t)\right]^2 dt =$$
$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\Gamma_0\dot{\omega}^2(t) + \Gamma_1\omega^2(t) + \Gamma_2 y_1^2(t) + \ldots + \Gamma_{n+1}y_n^2(t)\right]dt + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_2(t)\right]dt \geq 0, \tag{15}$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_2(t)\right]dt\right| = \left|\lim_{T\to\infty}F_2(T) - F_2(0)\right| < \infty. \tag{16}$$

Теорема 5. Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрица A-гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, $\int_{\sigma}^{\sigma+\Delta}\varphi(\xi)d\xi = 0$. Тогда для любой величины τ_3, вдоль решения системы (4), (6) несобственный интеграл

$$I_3 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \varphi(\sigma(t))\tau_3\dot{\sigma}(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[N_1\omega^2(t) + N_2 y_1^2(t) + \ldots + N_{n+1}y_n^2(t)\right]dt +$$
$$+\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_3(t)\right]dt = \lim_{T\to\infty}\int_{\sigma(0)}^{\sigma(T)}\varphi(\sigma)\tau_3 d\tau < \infty, \tag{17}$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_3(t)\right]dt\right| = \left|\lim_{T\to\infty}F_3(T) - F_3(0) < \infty\right|. \tag{18}$$

Рассмотрим случай, когда $\int_{\sigma}^{\sigma+\Delta}\varphi(\xi)d\xi = \alpha \neq 0.$ Пусть величина $\beta = \int_{\sigma}^{\sigma+\Delta}\left|\varphi(\sigma)\right|d\,\sigma,$ где α, β – известные числа. Пусть величина $\nu = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

Теорема 6. Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, $\int_{\sigma}^{\sigma+\Delta}\varphi(\xi)d\xi = \alpha \neq 0$. Тогда для любых величин $\tau_4, \tau_5 > 0$, вдоль решения системы (4), (6) несобственный интеграл

$$I_4 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\varphi(\sigma(t))\tau_4\dot{\sigma}(t) - \frac{\tau_4\nu^2}{4\tau_5}\varphi^2(\sigma(t)) - \tau_5\dot{\sigma}^2(t)\right]dt =$$
$$= \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[P_1\omega^2(t) + P_2 y_1^2(t) + \ldots + P_{n+1}y_n^2(t)\right]dt + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_4(t)\right]dt \leq \tag{19}$$
$$\leq \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\varphi(\sigma(t)) - \nu\left|\varphi(\sigma(t))\right|\right]\tau_4\dot{\sigma}(t)dt < \infty,$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_4(t)\right]dt\right| = \left|\lim_{T\to\infty}F_4(T) - F_4(0)\right| < \infty. \tag{20}$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\varphi(\sigma(t)) - \nu\left|\varphi(\sigma(t))\right|\right]\tau_4\dot{\sigma}(t)dt\right| < \infty.$$

Теорема 7. Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, $\int_{\sigma}^{\sigma+\Delta}\varphi(\xi)d\xi = \alpha \neq 0$. Тогда для любых величин $\delta_1 > 0, \delta_2, \delta_3$ вдоль решения системы *(4), (5) несобственный интеграл*

$$I_5 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[-\delta_1\xi^2(t) - \frac{\delta_2^2}{\delta_1}\dot\sigma^2(t) - \frac{\delta_3^2\nu^2}{\delta_1}\varphi^2(\sigma(t)) - 2\delta_2\xi\dot\sigma + \frac{\delta_2\delta_3}{\delta_1}\varphi(\sigma(t))\dot\sigma(t)\right]dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[L_0\dot\omega^2(t) + L_1\omega^2(t) + L_2 y_1^2(t) + \ldots + L_{n+1}y_n^2(t)\right]dt + \lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\frac{d}{dt}F_5(t)\right]dt \le \tag{21}$$

$$\le \lim_{T\to\infty}\int_0^T\left(-\frac{2\delta_3\nu}{\delta_1}\right)\xi|\varphi|\,dt + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{\delta_2\delta_3}{\delta_1}\left[\varphi - \nu|\varphi|\right]\dot\sigma\,dt < \infty,$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left(-\frac{2\delta_3\nu}{\delta_1}\right)\xi|\varphi|\,dt\right| < \infty, \quad \left|\lim_{T\to\infty}\int_0^T\frac{\delta_2\delta_3}{\delta_1}\left[\varphi - \nu|\varphi|\right]\dot\sigma\,dt\right| < \infty. \tag{22}$$

Теорема 8. Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma)\in\Phi_0$. Тогда для любых величин h_0, h_1, h_2, вдоль решения системы (4), (6) несобственный интеграл

$$I_6 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[h_0\ddot\sigma(t) + h_1\dot\sigma(t) + h_2\varphi(\sigma(t))\right]^2 dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[H_0\dot\omega^2(t) + H_1\omega^2(t) + H_2 y_1^2(t) + \ldots + H_{n+1}y_n^2(t)\right]dt + \lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\frac{d}{dt}F_6(t)\right]dt \ge 0 \tag{23}$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\frac{d}{dt}F_6(t)\right]dt\right| = \left|\lim_{T\to\infty}F_6(T) - F_6(0)\right| < \infty. \tag{24}$$

Глобальная асимптотическая устойчивость. На основе изложенных результатов могут быть сформулированы критерии глобальной асимптотической устойчивости стационарного множества Λ системы (1), (2) для случаев а) $\int_\sigma^{\sigma+\Delta}\varphi(\xi)d\xi = 0$; б) $\int_\sigma^{\sigma+\Delta}\varphi(\xi)d\xi = \alpha \ne 0$ в отдельности.

Теорема 9. Пусть выполнены следующие условия:

1) матрица A- гурвицева, $\varphi(\sigma)\in\Phi_0$, функция $\dfrac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma}$- равномерно непрерывна для любого $\sigma,\ \sigma\in R^1$;
2) существует вектор $\theta^*\in R^n$ такой, что
$$\theta B = 0,\ \theta AB = 0,\ \ldots,\ \theta A^{n-2}B = 0,\ \chi = \theta A^{n-1}B \ne 0;$$
3) ранг матрицы $R = \left\|\theta^*, A^*\theta^*, \ldots, A^{*n-1}\theta^*\right\|$ равен n;
4) $\int_\sigma^{\sigma+\Delta}\varphi(\xi)d\xi = 0$;
5) выполнены равенства $M_0 + \Gamma_0 = 0,\ M_i + \Gamma_i = N_i,\ i = \overline{1, n+1}$;

Тогда стационарное множество Λ системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво.

Теперь рассмотрим случай, когда

$$\varphi(\sigma)\in\Phi_0 = \left\{\varphi(\sigma)\in C^1(R^1,R^1)\,\middle|\,\mu_1 \le \frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} \le \mu_2,\ \varphi(\sigma) = \varphi(\sigma+\Delta),\ \forall\sigma,\ \sigma\in R^1\right\}. \tag{25}$$

Теорема 10. Пусть выполнены условия 1)-4) теоремы 9, и пусть, кроме того, выполнены равенства

$$M_0 + H_0 = 0,\ M_i + H_i = N_i,\ i = \overline{1, n+1}. \tag{26}$$

Тогда

$$\lim_{T\to\infty}\left[h_0\ddot\sigma(t) + h_1\dot\sigma(t) + h_2\varphi(\sigma(t))\right] = 0. \tag{27}$$

Если, кроме того, решение системы второго порядка

$$h_0\ddot{z}+h_1\dot{z}+h_2\varphi(z)=0,\ t\in I \tag{28}$$

глобально асимптотически устойчиво, то стационарное множество Λ системы (1), (25) глобально асимптотически устойчиво.

Теорема 11. Пусть выполнены условия теоремы 6 и пусть, кроме того:

1) $\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta}\varphi(\xi)d\xi=\alpha\neq 0,\ \beta=\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta}|\varphi(\sigma)|d\sigma,\ \nu=\dfrac{\alpha}{\beta},\ \dfrac{d\varphi}{d\sigma}$ – равномерно непрерывна.

2) выполнены равенства $M_0+\Gamma_0=0,\ M_i+\Gamma_i=P_i,\ i=\overline{1,n+1}$.

Тогда стационарное множество Λ системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво.

Теорема 12. Пусть выполнены условия теоремы 7, и пусть, кроме того:

1) $\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta}\varphi(\xi)d\xi=\alpha\neq 0,\ \beta=\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta}|\varphi(\xi)|d\xi,\ \nu=\dfrac{\alpha}{\beta}$, функция $\psi(\sigma)=\dfrac{d\varphi}{d\sigma}$ – равномерно непрерывна по $\sigma,\ \sigma\in R^1$;

2) выполнены равенства $M_0+\Gamma_0=L_0,\ M_i+\Gamma_i=L_i,\ i=\overline{1,n+1}$.

Тогда стационарное множество Λ системы (1), (25) глобально асимптотически устойчиво.

Теорема 13. Пусть выполнены условия теоремы 8, и пусть, кроме того:

1) $\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta}\varphi(\xi)d\xi=\alpha\neq 0,\ \beta=\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta}|\varphi(\xi)|d\xi,\ \nu=\dfrac{\alpha}{\beta}$; функция $\psi(\sigma)=\dfrac{d\varphi}{d\sigma}$ – равномерно непрерывна по $\sigma,\ \sigma\in R^1$;

2) выполнены равенства $M_0+H_0=L_0,\ \ M_i+H_i=L_i,\ i=\overline{1,n+1}$.

Тогда $\lim\limits_{T\to\infty}\left[h_0\ddot{\sigma}(t)+h_1\dot{\sigma}(t)+h_2\varphi(\sigma(t))\right]=0$.

Если, кроме того, решение системы второго порядка $h_0\ddot{z}+h_1\dot{z}+h_2\varphi(z)=0,\ t\in I$ глобально асимптотически устойчиво, то стационарное множество Λ системы (1), (25) глобально асимптотически устойчиво.

В качестве примера рассмотрены уравнения движения систем фазовой автоподстройки частоты с пропорционально интегрирующим фильтром [6], решение которого подтвердило эффективность предлагаемого метода.

Литература

1. Айсагалиев С.А., Иманкул Т.Ш. Теория фазовых систем. – Алматы: Қазақ университеті, 2005.
2. Айсагалиев С.А., Абенов Б.К., Иманкул Т.Ш. Алгебраические критерии глобальной асимптотической устойчивости фазовых систем. – Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика.– Алматы, 2002, №7(35).
3. Айсагалиев С.А. К теории абсолютной устойчивости регулируемых систем. //Дифференциальные уравнения, Москва-Минск, 1999, т. 35, №8.
4. Айсагалиев С.А. Управляемость и оптимальное управление в нелинейных системах. – Известия РАН, сер. Теория систем управления. 1999, №3.
5. Айсагалиев С.А., Айпанов Ш.А. К теории глобальной асимптотической устойчивости фазовых систем. //Дифференциальные уравнения, Москва-Минск, 1994, т. 30, №5.
6. Белюстина Л.Н., Быков В.В., Кивелева К.Г., Шалфеев В.А. О величине полосы захвата системы ФАП с пропорционально интегрирующим фильтром. – Известия вузов, Радиофизика, 1970, т.13, №4.