ОПТИМАЛЬНЫЕ ДЕЙСТВИЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ L_p

Ш. Билал
Институт математики МОН РК, Алматы, bilal44@mail.ru

В данной работе, с использованием функции Грина оператора Штурма-Лиувилля, показана позитивность оператора L_p.

Пусть $J \equiv (a,b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$. В пространстве $L_p \equiv L_p(J)$, $1 \le p \le \infty$, $J=(a,b) \subseteq R$, определим оператор

$$L_p y = -(\rho(x) y'(x))' + v(x) y(x), \quad y \in D(L_p),$$

соответствующий уравнению

$$-(\rho(x) y'(x))' + v(x) y(x) = 0, \qquad (1)$$

где $\rho(x)-$положительная непрерывно-дифференцируемая в J функция, $v(x) \ge 1$ непрерывная в J функция. Область определения $D(L_p) \equiv D_p$ оператора L_p состоит из функций $y(x) \in L_p$ таких, что функции $y(x)$, $\rho(x) y'(x)$ локально абсолютно непрерывны и $L_p y$ принадлежит L_p.

Пусть будет задано

Условие А [3]: Для некоторого $c \in (a,b)$ функция

$$T_a(t) = \int_t^c \rho^{-1}(s) \int_s^c v(\tau) d\tau \qquad \left(T_b(t) = \int_c^t \rho^{-1}(s) ds \int_c^s v(\tau) d\tau ds \right)$$

1) не интегрируема в окрестности точки a (b),

2) $\lim\limits_{t \to a} T_a(t) = \infty$ $\left(\lim\limits_{t \to b} T_b(t) = \infty \right)$.

Отсюда следует, что если $a(b)$ бесконечность, то условие А.1 всегда выполнено в силу монотонности функции $T_a(t)$ $(T_b(t))$. Если $a(b)$ конечна, то условие А.2 является следствием условия А.1. Отметим, ёще следующее условие, вытекающее из условии А.

$$\int_c^b \rho^{-1}(s) ds \int_c^b v(s) ds = \infty \qquad \left(\int_a^c \rho^{-1}(s) ds \int_a^c v(s) ds = \infty \right)$$

Введем следующие функции:

$$d_+(x) = \sup \left\{ d > 0 : \int_x^{x+d} \rho^{-1}(s) ds \int_x^{x+d} \varphi(s) ds \le 1 \;, \quad [x, x+d) \subset J \right\},$$

$$d_-(x) = \sup \left\{ d > 0 : \int_{x-d}^{x} \rho^{-1}(s) ds \int_{x-d}^{x} \varphi(s) ds \le 1 \;, \quad (x-d, x] \subset J \right\}.$$

Положим

$$\varphi_+(x) = \int_x^{x+d_+(x)} \rho^{-1}(s) ds \,, \quad \varphi_-(x) = \int_{x-d_-(x)}^{x} \rho^{-1}(s) ds .$$

Из результатов работы [1] следует, что D_p плотна в L_p и $L_p -$замкнутый оператор.

Определение [2, стр.274]. Линейный замкнутый оператор A, действующий в банаховом пространстве E и с $D(A)=E$ будет позитивным, если $\forall \lambda>0$ существуют операторы $(A+\lambda I)^{-1}$ и если

$$\left\|(A+\lambda I)^{-1}\right\| \leq \frac{C}{1+\lambda} \quad (\lambda \geq 0).$$

Имеет место следующая

Теорема. Пусть выполнено условие А. Тогда оператор L_p непрерывно обратим и позитивен.

Предварительно докажем лемму.

Лемма. Пусть выполнено условие А. Тогда уравнение (1) не имеет решений из $L_p(J)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Доказательство. Пусть $y_+(x)$, $y_-(x)$ решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям:

Теорема 1 [3]. Пусть выполнено условие А. Тогда уравнение (1) имеет два линейно независимых решения $y_+(x)$ и $y_-(x)$, обладающие следующими свойствами:

1) $y_\pm(x)>0$, $y_\pm(x)\neq 0$, $x \in J$;

2) $y_+(x)$ монотонно убывает, $y_-(x)$ монотонно возрастает и $\lim\limits_{x\to b} y_+(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a} y_-(x)=0$ при $b=\infty$, $a=-\infty$ соответственно;

3) $\lim\limits_{x\to b} y_+(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} y_-(x)=0$ при $\int_c^b v(s)ds=\infty$ и $b<\infty$, $\int_a^c v(s)ds=\infty$ и $a<\infty$ соответственно;

4) $\lim\limits_{x\to a}\rho(x)y'_-(x)=\lim\limits_{x\to b}\rho(x)y'_+(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a} y_-(x)=0$;

5) $\frac{1}{2}\varphi_\pm^{-1}(x)y_\pm(x) \leq \mp\rho(x)y'_\pm(x) \leq 2\varphi_\pm^{-1}(x)y_\pm(x)$, $\quad x \in J$.

Тогда любое решение $y(x)$ уравнения (1) запишется в виде

$$y(x)=C_1y_+(x)+C_2y_-(x) \tag{2}$$

Из

$$y_-(t) \geq y_-(c)\int_c^t \rho^{-1}(s)\int_c^s v(\tau)d\tau ds \qquad (27)\ [3]$$

на основании А следует, что $y_-(t)\notin L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, в окрестности точки b. Если покажем, что в окрестности точки B $y_+(x)\in L_p$, то этим мы докажем, что (2) не принадлежит в L_p ни при каких значениях C_1, C_2.

При $1 \leq p \leq \infty$ для любого $x \in J=(a,b)$ на основании утверждения 3) теоремы 1, имеем

$$\int_x^b y_+^p(s)ds \leq y_+^{p-1}(x)\int_x^b y_+(s)ds \leq y_+^{p-1}(x)\int_x^b v(s)y_+(s)ds =$$

$$= y_+^{p-1}(x)\int_x^b \left(\rho(s)y'_+(s)\right)' ds = y_+^{p-1}(x)\rho(x)\left|y'_+(x)\right|.$$

В силу монотонности $y_+(t)$, $\sup\limits_{x\leq t\leq b} y_+(t)=y_+(x)$. Таким образом, для любого $x \in J=(a,b)$, $y_+(\cdot)\in L_p(x,b)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. В силу леммы 1, обратный оператор L_p^{-1} существует. Покажем, что L_p^{-1} имеет вид

$$L_p^{-1} f = \int_J G(x,s) f(s) ds \tag{3}$$

и ограниченно действует в L_p, $1 \le p \le \infty$.

Здесь

$$G(x,s) = \frac{1}{\mu} \begin{cases} y_+(x) y_-(s) & \text{при} \quad s \le x \\ y_-(x) y_+(s) & \text{при} \quad s > x \end{cases}$$

есть функция Грина оператора L_p. Постоянная μ взята из тождества Лагранжа

$$\mu = \rho(x) y_-'(x) y_+(x) - \rho(x) y_+'(x) y_-(x)$$

В дальнейшем, без ограничения общности, положим $\mu = 1$.

Сначала покажем, что для любого $f \in L_p$

$$Kf = \int_J G(x,s) f(s) ds$$

принадлежит D_p. Действительно, из представления

$$(Kf)(x) = y_-(x) \int_x^b y_+(s) f(s) ds + y_+(x) \int_a^x y_-(s) f(s) ds \tag{4}$$

следует, что Kf локально абсолютно непрерывен, если существуют интегралы в (4). Существование интегралов в (4) следует из неравенств

$$\int_x^b y_+(s) f(s) ds \le \| y_+(\cdot) \|_{L_{p'}(x,b)} \| f \|_{L_p(J)} < \infty,$$

$$\int_a^x y_-(s) f(s) ds \le \| y_-(\cdot) \|_{L_{p'}(a,x)} \| f \|_{L_p(J)} < \infty,$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Эти неравенства справедливы в силу неравенства Гельдера и функция $f(\cdot)$ суммируема с $p-$ой степенью на всем интервале $J = (a,b)$. Тогда из (4) имеем

$$\rho(x) \frac{d}{dx}(Kf)(x) = \rho(x) y_-'(x) \int_x^b y_+(s) f(s) ds + \rho(x) y_+'(x) \int_a^x y_-(s) f(s) ds \tag{5}$$

Отсюда видно, что $f(x) \frac{d}{dx}(Kf)(x)$ тоже локально абсолютно непрерывен.

Дифференцируя (5) еще раз, получим

$$\frac{d}{dx}\left(\rho(x) \frac{d}{dx}(Kf)(x) \right) = (\rho(x) y_-'(x))' \int_x^b y_+(s) f(s) ds - \rho(x) y_-'(x) y_+(x) f(x) +$$

$$+ (\rho(x) y_+'(x))' \int_a^x y_-(s) f(s) ds + \rho(x) y_+'(x) y_-(x) f(x) = v(x) \Bigg(y_-(x) \int_x^b y_+(s) f(s) ds +$$

$$+ y_+(x) \int_a^x y_-(s) f(s) ds \Bigg) - (\rho(x) y_-'(x) y_+(x) - \rho(x) y_+'(x) y_-(x)) f(x) = vKf - f.$$

То есть

$$L_p K f = f. \tag{6}$$

Таким образом, для любого $f \in L_p$, $Kf \in D_p$.

С другой стороны, из (6) и из существования L_p^{-1} следует, что L_p^{-1} определен во всем пространстве L_p и имеет место (3).

Теперь оценим норму оператора L_1^{-1}.

$$\left\|L_1^{-1}\right\|_{1\to 1} = \sup_{x\in J}\left(y_-(x)\int_x^b y_+(s)ds + y_+(x)\int_a^x y_-(s)ds \right).$$

Положим

$$v_+(x) = \inf_{x\le t\le b} v(t), \quad v_-(x) = \inf_{a\le t\le x} v(t).$$

Тогда

$$y_-(x)\int_x^b y_+(s)ds \le \frac{y_-(x)}{v_+(x)}\int_x^b v(s)y_+(s)ds = \frac{y_-(x)}{v_+(x)}\int_x^b \left(\rho(s)y_+'(s)\right)' ds = -\frac{y_-(x)}{v_+(x)}\rho(x)y_+'(x),$$

$$y_+(x)\int_a^x y_-(s)ds \le \frac{y_+(x)}{v_-(x)}\int_a^x v(s)y_-(s)ds = \frac{y_+(x)}{v_-(x)}\int_a^x \left(\rho(s)y_-'(s)\right)' ds = \frac{y_+(x)}{v_-(x)}\rho(x)y_-'(x)$$

на основании утверждения 3) теоремы 1. С помощью этих оценок, получим

$$\left\|L_1^{-1}\right\|_{1\to 1} \le \sup_{x\in J}\max\left\{\frac{1}{v_+(x)}, \frac{1}{v_-(x)}\right\} \le 1.$$

Так как функция Грина $G(x,s)$ симметрична, то поэтому справедливо неравенство

$$\left\|L_1^{-1}\right\|_{1\to 1} = \left\|\left(L_1^{-1}\right)^*\right\|_{\infty\to\infty} = \left\|L_\infty^{-1}\right\|_{\infty\to\infty} \le \sup_{x\in J}\max\left\{\frac{1}{v_+(x)}, \frac{1}{v_-(x)}\right\} \le 1.$$

Теперь применяя интерполяционную теорему Рисса-Торина [4, с.12] имеем

$$\left\|L_p^{-1}\right\|_{p\to p} \le \sup_{x\in J}\max\left\{\frac{1}{v_+(x)}, \frac{1}{v_-(x)}\right\} \le 1.$$

Для дифференциального уравнения

$$-\left(\rho(x)y'(x)\right)' + \left(v(x)+\lambda\right)y(x) = 0,$$

обратный оператор $\left(L_p+\lambda\right)^{-1}$ существует и имеет аналогичный, как в (3) вид

$$\left(L_p+\lambda\right)^{-1} f = \int_J G(x,s,\lambda)f(s)ds$$

и ограниченно действует в L_p, $1\le p\le\infty$. Это доказывается аналогичным образом. И норма оператора $\left(L_p+\lambda\right)^{-1}$ оценивается также. То есть

$$\left\|\left(L_p+\lambda\right)^{-1}\right\|_{p\to p} \le \sup_{x\in J}\max\left\{\frac{1}{v_+(x)+\lambda}, \frac{1}{v_-(x)+\lambda}\right\} \le \frac{1}{1+\lambda}, \quad 1\le p\le\infty.$$

Отсюда следует, что оператор $L_p+\lambda$ непрерывно обратим и

$$\left\|\left(L_p+\lambda\right)^{-1}\right\|_{p\to p} \le \frac{1}{1+\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Этим самым мы доказали, что оператор $L_p -$ позитивен.

Список литературы

1. Ойнаров Р. Некоторые свойства оператора Штурма-Лиувилля в L_p // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1990. №1. С. 43-47.
2. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966, 500с.
3. Ш. Билал. О некоторых свойствах оператора Штурма-Лиувилля // Изв. АН МОН РК. Сер. физ.-мат. 2009. №5.
4. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664с.