О МЕТОДЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ЗАМЫКАНИЯ

Тлеубергенов М. И.

Институт математики, Казахстан, marat207@mail.ru

Рассматривается одна из обратных задач динамики – задача замыкания в классе стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито по заданным свойствам движения, не зависящим от скоростей. Получены достаточные условия существования заданного интегрального многообразия достроенной системы стохастических дифференциальных уравнений. Отдельно исследуются общий линейный и скалярный нелинейный случаи поставленной задачи.

В работе Еругина [1] строится множество обыкновенных дифференциальных уравнений, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа, впоследствии, оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) [2,3 и др.]. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ метод квазиобращения предложен в работе [3], который дает необходимые и достаточные условия разрешимости. Но наряду с указанным методом в [3] предлагаются метод разделения и метод проектирования дающие, с одной стороны, лишь достаточные условия разрешимости обратных задач, но, с другой стороны, эффективные при построении множества искомых функций в конкретных прикладных обратных задачах.

1. Постановка задачи. Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение второго порядка типа Ито

$$\ddot{x} = f_1(x,\dot{x},u,\dot{u},t) + \sigma_1(x,\dot{x},u,\dot{u},t)\dot{\xi}\ , \qquad x \in R^n,\ \xi \in R^k, \tag{1.1}$$

где σ_1 - матрица размерности $(n \times k)$, а $\{\xi_1(t,\omega),...,\xi_k(t,\omega)\}$ - система независимых винеровских процессов [4], заданная на некотором вероятностном пространстве (Ω, U, P).

Требуется достроить замыкающие уравнения

$$\ddot{u} = f_2(x,\dot{x},u,\dot{u},t) + \sigma_2(x,\dot{x},u,\dot{u},t)\dot{\xi}, \qquad u \in R^r \tag{1.2}$$

по заданным частным интегралам

$$\Lambda(t): \lambda(x,u,t) = 0, \quad \text{где} \quad \lambda \in R^m,\ \lambda = \lambda(x,u,t) \in C^{222}_{xut} \tag{1.3}$$

Предполагается, что вектор-функции $f_1(x,\dot{x},u,\dot{u},t), f_2(x,\dot{x},u,\dot{u},t)$ и матрицы $\sigma_1(x,\dot{x},u,\dot{u},t), \sigma_2(x,\dot{x},u,\dot{u},t)$ непрерывны по t и липшицевы по $x, u,\ \dot{x}, \dot{u}$ в области

$$U_H(\Lambda) = \left\{ z = (x^T, \dot{x}^T, u^T, \dot{u}^T)^T : \rho(z, \Lambda(t)) < H, H > 0 \right\}, \tag{1.4}$$

что обеспечивает в (1.4) существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $z(t)$ системы уравнений (1.1), (1.2) с начальным условием $z(t_0) = z_0$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [4].

Ранее указанная задача:

1) в случае отсутствия случайных возмущений $(\sigma_1 \equiv 0,\ \ \sigma_2 \equiv 0)$ достаточно полно была исследована в работах [2,3];

2) в случае, когда $\sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 \neq 0$ и с заданными свойствами вида

$$\Lambda(t): \lambda(x,\dot{x},u,\dot{u},t) = 0\ , \quad \lambda \in R^m,\ \lambda = \lambda(x,\dot{x},u,\dot{u},t) \in C^{12121}_{x\dot{x}u\dot{u}t} \tag{1.3'}$$

методом квазиобращения была рассмотрена в [5], а с заданными свойствами вида (1.3) методом квазиобращения - в [6], а методом разделения – в [7].

Рассмотрим задачу построения множества замыкающих стохастических уравнений (1.2) по заданным свойствам (1.3) методом проектирования [3, с.23] произвольного вектора на многообразие, касательное к интегральному многообразию. Этот метод широко используется для решения задач преследования, а также управления манипуляторами.

Предварительно по правилу стохастического дифференцирования Ито [4, с.204] составляется уравнение возмущенного движения

$$\begin{aligned}\ddot{\lambda} &= \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial x}\dot{x} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial u}\dot{u} + \left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial t} + \dot{u}^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial u} + \dot{x}^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial x}\right)\dot{x} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial t} + \dot{x}^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial x} + \dot{u}^T\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial u}\right)\dot{u} + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\left(f_1 + \sigma_1\dot{\xi}\right) + \frac{\partial\lambda}{\partial u}\left(f_2 + \sigma_2\dot{\xi}\right).\end{aligned} \tag{1.5}$$

Введем произвольные функции Н.П. Еругина [1]: $m-$мерную вектор-функцию $A(\lambda,\dot{\lambda},x,u,t)$ и $(m\times n)-$матрицу $B(\lambda,\dot{\lambda},x,u,t),$ обладающие свойством $A(0,0,x,u,t)\equiv 0,$ $B(0,0,x,u,t)\equiv 0,$ и при этом имеет место

$$\ddot{\lambda} = A(\lambda,\dot{\lambda},x,u,t) + B(\lambda,\dot{\lambda},x,u,t)\dot{\xi}. \tag{1.6}$$

Отсюда, сравнивая уравнения (1.5) и (1.6) приходим к соотношениям

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}f_2 = A - \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial x}\dot{x} - \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial u}\dot{u} - \left(\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial t} + \dot{u}^T\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial u} + \dot{x}^T\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial x}\right)\dot{x} + \\ -\left(\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial t} + \dot{x}^T\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial x} + \dot{u}^T\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial u}\right)\dot{u} - \dfrac{\partial\lambda}{\partial u}f_1, \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial u}\sigma_2 = B - \dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\sigma_1,\end{cases} \tag{1.7}$$

из которых нужно определить вектор-функцию f_2 и матрицу σ_2.

Для разрешимости поставленной задачи методом квазиобращения в работах [5,6] для заданных множеств вида (1.3) и (1.3’) использовалась следующая лемма.

Лемма 1[3, с. 12]**.** Совокупность всех решений линейной системы

$$Hv = g,\ H = (h_{\mu k}),\ v = (v_k), g = (g_\mu), \mu = \overline{1,m},\ k = \overline{1,n},\ m \le n, \tag{1.8}$$

где матрица H имеет ранг равный m, определяется выражением

$$v = \alpha v^\tau + v^\upsilon. \tag{1.9}$$

Здесь $\alpha-$ скалярная величина,

$$v^\tau = [HC] = [h_1 \ldots h_m c_{m+1} \ldots c_{n-1}] = \begin{vmatrix} e_1 & \ldots & e_n \\ h_{11} & \ldots & h_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{m1} & \ldots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \ldots & c_{m+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1,1} & \ldots & c_{n-1,n}\end{vmatrix}$$

есть векторное произведение векторов $h_\mu = (h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_\rho = (c_{\rho k}),$ $\rho = \overline{m+1, n-1};$ $e_k -$единичные орты пространства $R^n, v^\tau = (v_k^\tau)$.

$$v_k^{\tau}=\begin{vmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ h_{11} & \dots & h_{1k} & \dots & h_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mk} & \dots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,k} & \dots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}, v^{\upsilon}=H^{+}g,$$

$H^{+}=H^{T}(HH^{T})^{-1}, H^{T}$ - матрица, транспонированная к H.

Суть метода проектирования, следуя [3, с.23] и с учетом случайных возмущений, заключается в следующем: для определения вектора правой части уравнения (1.2), решения которого удовлетворяют условию (1.3), используется то же, что и в методе квазиобращения [3,6], функционально-алгебраическое уравнение (1.8). Решение v этого уравнения по лемме 1 (не ограничивая общности, $\alpha:=1$) находят в виде суммы $v=v^{\tau}+v^{\upsilon}$, где $v^{\upsilon}=H^{+}g$, а v^{τ} удовлетворяет уравнению $Hv^{\tau}=0$, $H=\lambda_u$. Для определения v^{τ} зададим произвольный вектор c. В качестве v^{τ} можно взять проекцию вектора c на многообразие, касательное к множеству $\Lambda(t)$ (1.3), а именно $v^{\tau}=(E-\lambda_u^{T}\Gamma^{-1}\lambda_u)$, $\Gamma=\lambda_u\lambda_u^{T}$. В этом случае уравнение (1.2) с учетом (1.7) примет следующий вид:

$$\ddot{u}=(E-\lambda_u^{T}\Gamma^{-1}\lambda_u)c+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^{+}\tilde{A}+$$
$$+\left((E-\lambda_u^{T}\Gamma^{-1}\lambda_u)c+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^{+}\tilde{B}_1,\dots,(E-\lambda_u^{T}\Gamma^{-1}\lambda_u)c+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^{+}\tilde{B}_r\right)\dot{\xi}, \qquad (1.10)$$

где выражение $(E-\lambda_u^{T}\Gamma^{-1}\lambda_u)c+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^{+}\tilde{B}_i$ есть i-ый столбец матрицы σ_2; $\tilde{B}_i=(\tilde{B}_{1i},\tilde{B}_{2i},\dots,\tilde{B}_{ri})^{T}-i-$ый столбец матрицы $\tilde{B}$, $(i=\overline{1,k})$. А вектор-функция $\tilde{A}$ и матрица $\tilde{B}$ имеют соответственно вид:

$$\tilde{A}=A-\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial x}\dot{x}-\frac{\partial^2\lambda}{\partial t\partial u}\dot{u}-\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial t}+\dot{u}^{T}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial u}+\dot{x}^{T}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial x}\right)\dot{x}+\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial t}+\right.$$
$$\left.+\dot{x}^{T}\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial x}+\dot{u}^{T}\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial u}\right)\dot{u}-\frac{\partial\lambda}{\partial u}f_1,\qquad \tilde{B}=B-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\sigma_1.$$

Иначе говоря, в силу полученной системы функционально-алгебраических уравнений (1.7) и построенного уравнения (1.10) искомые $r-$мерная вектор-функция f_2 и $(r\times k)$ матрица σ_2 методом проектирования в сочетании с методом квазиобращения определяются в виде:

$$\begin{cases} f_2=(E-\lambda_u^{T}\Gamma^{-1}\lambda_u)c+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^{+}\tilde{A}, \\ \sigma_{2i}=(E-\lambda_u^{T}\Gamma^{-1}\lambda_u)c+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^{+}\tilde{B}_i, \end{cases} \qquad (1.11)$$

где $\sigma_{2i}=(\sigma_{21i},\sigma_{22i},\dots,\sigma_{2ni})^{T}-$ $i-$ый столбец матрицы $\sigma_2=(\sigma_{2\nu j})$, $(\nu=\overline{1,n})$, $(j=\overline{1,k})$.

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы множество (1.3) при заданной структуре (1.1) было интегральным многообразием системы дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито (1.1), (1.2) достаточно, чтобы искомые функции замыкающего уравнения (1.2) имели соответственно вид (1.11).*

2. Линейный случай стохастической задачи замыкания. По заданному линейному по сносу стохастическому дифференциальному уравнению второго порядка типа Ито

$$\ddot{x} = \Phi_1(t)x + \Phi_2(t)\dot{x} + \Phi_3(t)u + \Phi_4(t)\dot{u} + \varphi(t) + T_1\dot{\xi} \tag{2.1}$$

требуется достроить линейное по сносу замыкающее стохастическое уравнение

$$\ddot{u} = \Psi_1(t)x + \Psi_2(t)\dot{x} + \Psi_3(t)u + \Psi_4(t)\dot{u} + \psi(t) + T_2\dot{\xi} \tag{2.2}$$

так, чтобы заданное линейное множество

$$\Lambda(t): \lambda \equiv G_1(t)x + G_2(t)u + l(t) = 0,\ \lambda \in R^m,\ x \in R^n,\ u \in R^r \tag{2.3}$$

было интегральным для системы уравнений (2.1), (2.2).

Иначе говоря, по заданным $G_1(t), G_2(t)$, $\Phi_1(t), \Phi_2(t)$, $\Phi_3(t), \Phi_4(t)$, $T_1(t)$, $T_2(t)$ и заданным вектор-функциям $\varphi(t), l(t)$ требуется определить $(r \times n)$- матрицы $\Psi_1(t), \Psi_2(t)$, $(r \times r)$- матрицы $\Psi_3(t), \Psi_4(t)$ и r-мерную вектор-функцию $\psi(t)$, а также $(r \times k)$ - матрицу $T_2(t)$ так, чтобы обеспечить для системы (2.1), (2.2) интегральность свойств движения (2.3).

В рассматриваемой задаче уравнение возмущенного движения имеет вид:

$$\begin{aligned}\ddot{\lambda} &= \ddot{G}_1 x + 2\dot{G}_1\dot{x} + G_1\left(\Phi_1 x + \Phi_2\dot{x} + \Phi_3 u + \Phi_4\dot{u} + \varphi(t) + T_1\dot{\xi}\right) + \\ &+ G_2\left(\Psi_1 x + \Psi_2\dot{x} + \Psi_3 u + \Psi_4\dot{u} + \psi(t) + T_2\dot{\xi}\right) + 2\dot{G}_2\dot{u} + \ddot{l}(t) + \ddot{G}_2 u,\end{aligned} \tag{2.4}$$

а, с другой стороны, уравнение возмущенного движения с помощью произвольных функций Н.П. Еругина [1] – вектор-функций $A_1 = A_1(t), A_2 = A_2(t)$ и $(m \times k)$- матрицы-функции $B = B(\lambda, \dot{\lambda}, x, u, t)$ со свойством $B(0,0,x,u,t) \equiv 0$, имеет вид

$$\ddot{\lambda} = A_1\lambda + A_2\dot{\lambda} + B(\lambda, \dot{\lambda}, x, u, t)\dot{\xi}\,. \tag{2.5}$$

Тогда из уравнений (2.4) и (2.5) с учетом того, что

$$\begin{aligned}A_1\lambda &= A_1\left(G_1(t)x + G_2(t)u + l(t)\right), \\ A_2\dot{\lambda} &= A_2\left(\dot{G}_1(t)x + G_1(t)\dot{x} + \dot{G}_2(t)u + G_2\dot{u} + \dot{l}(t)\right)\end{aligned} \tag{2.6}$$

следуют соотношения

$$\begin{cases}\ddot{G}_1 x + 2\dot{G}_1\dot{x} + G_1\left(\Phi_1 x + \Phi_2\dot{x} + \Phi_3 u + \Phi_4\dot{u} + \varphi(t)\right) + 2\dot{G}_2\dot{u} + \ddot{l}(t) + \ddot{G}_2 u \\ + G_2\left(\Psi_1 x + \Psi_2\dot{x} + \Psi_3 u + \Psi_4\dot{u} + \psi(t)\right) = A_1\left[G_1(t)x + G_2(t)u + l(t)\right] + \\ + A_2\left[\dot{G}_1(t)x + G_1(t)\dot{x} + \dot{G}_2(t)u + G_2(t)\dot{u} + \dot{l}(t)\right],\ G_1T_1 + G_2T_2 = B,\end{cases}$$

которые преобразуются к виду

$$\begin{aligned}&G_2\Psi_1 = A_1G_1 + A_2\dot{G}_1 - \ddot{G}_1 - G_1\Phi_1 \equiv N_1, \qquad G_2\Psi_2 = A_2G_1 - 2\dot{G}_1 - G_1\Phi_2 \equiv N_2, \\ &G_2\Psi_3 = A_1G_2 + A_2\dot{G}_2 - G_1\Phi_3 - \ddot{G}_2 \equiv N_3, \quad G_2\Psi_4 = A_2G_2 - 2\dot{G}_2 - G_1\Phi_4 \equiv N_4, \\ &G_2\Psi_4 = A_2G_2 - 2\dot{G}_2 - G_1\Phi_4 \equiv N_4, \qquad\qquad G_2T_2 = B - G_1T_1.\end{aligned} \tag{2.7}$$

На основании формулы (1.9) леммы 1 и метода проектирования совокупность всех решений системы уравнений (2.7) с учетом того, что в линейном случае $\Gamma = \lambda_u \lambda_u^T = G_2 G_2^T$, определяется в виде

$$\begin{cases} \psi(t) = (E - G_2^T (G_2 G_2^T)^{-1} G_2)c + \left(G_2\right)^+ L(t), \\ \Psi_{1i} = (E - G_2^T (G_2 G_2^T)^{-1} G_2)c + \left(G_2\right)^+ N_{1i}, \\ \Psi_{2i} = (E - G_2^T (G_2 G_2^T)^{-1} G_2)c + \left(G_2\right)^+ N_{2i}, \\ \Psi_{3i} = (E - G_2^T (G_2 G_2^T)^{-1} G_2)c + \left(G_2\right)^+ N_{3i}, \\ \Psi_{4i} = (E - G_2^T (G_2 G_2^T)^{-1} G_2)c + \left(G_2\right)^+ N_{4i}, \\ T_{2i} = (E - G_2^T (G_2 G_2^T)^{-1} G_2)c + \left(G_2\right)^+ N_{5i}, \end{cases} \tag{2.8}$$

где через $\Psi_{1i}, \Psi_{2i}, \Psi_{3i}, \Psi_{4i}, T_{2i}, N_{1i}, N_{2i}, N_{3i}, N_{4i}, N_{5i}$ обозначены соответственно $i-$ые столбцы матриц $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, N_1,\ N_2, N_3, N_4, N_5, T_2,$ а $N_1 = A_1 G_1 + A_2 \dot{G}_1 - \ddot{G}_1 - G_1 \Phi_1$, $N_2 = A_2 G_1 - 2\dot{G}_1 - G_1 \Phi_2,$, $N_3 = A_1 G_2 + A_2 \dot{G}_2 - G_1 \Phi_3 - \ddot{G}_2$, $N_3 = A_1 G_2 + A_2 \dot{G}_2 - G_1 \Phi_3 - \ddot{G}_2$, $L(t) = A_1 l(t) + A_2 \dot{l}(t) - G_1 \varphi(t) - \ddot{l}(t)$, $N_5 = B - G_1 T$.

Теорема 2. *Для того чтобы линейное множество (2.3) при заданной структуре (2.1) было интегральным многообразием системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито (2.1), (2.2) достаточно, чтобы искомые функции замыкающего уравнения (2.2) имели соответственно вид (2.8).*

Литература

1. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. 1952. Т.10. В.16. С.659-670.
2. Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики. М.,1986. 224с.
3. Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. Уравнения программных движений. М.,1986. 88с.
4. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990. 632с.
5. Тлеубергенов М.И. Об обратной стохастической задаче замыкания //Доклады МН-АН РК, 1999. № 1. С.53-60.
6. Тлеубергенов М.И. О решении обратной стохастической задачи замыкания методом квазиобращения // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. 2008. № 5. С. 5-9.
7. Тлеубергенов М.И. О решении обратной стохастической задачи замыкания методом разделения //Математический журнал. Алматы. 2009. № 1(31). С. 84-89.