УПРАВЛЕНИЕ, ОПТИМИЗАЦИЯ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 519.7

ОЦЕНКИ РОБАСТНОСТИ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ : АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ

Р.О. Оморов, А. Акунова, Т.А. Акунов

Рассматривается задача исследования робастности многомерных систем управления, для чего используются функции чувствительности эллипсоидных показателей качества многомерных динамических систем как во временной, так и в частотной областях к вариациям параметров. Для решения задачи используется аппарат функций чувствительности экстремальных элементов сингулярного разложения критериальных матриц. Совместное использование аппарата функций чувствительности с методом пространства состояний позволяет строить модели чувствительности как во временной, так и в частотной областях, на основе которых определяются эллипсоидные оценки функций чувствительности по состоянию, выходу и ошибке линейных многомерных непрерывных систем в форме мажорант и минорант этих функций. Для вычислений используется сингулярное разложение матриц, составленных из функций параметрической чувствительности. Полученные эллипсоидные оценки в силу содержательных возможностей сингулярного разложения матриц обладают свойством минимальной достаточности. Подход позволяет решить проблему «оптимального номинала», то есть проблему выбора номинального значения вектора первичных физических параметров.

Ключевые слова: линейная многомерная система; робастная устойчивость систем; эллипсоидная оценка; параметрическая чувствительность; модель чувствительности; сингулярное разложение; частотные передаточные функции; число обусловленности матрицы; частотное число обусловленности матрицы.

Введение. Постановка задачи

В развитии современной теории управления наблюдается повышенный интерес [1-6] к проблемам робастности и грубости (малочувствительности) систем. Вопросам робастности, с которыми тесно связана проблема грубости, посвящены работы ученых и исследователей многих стран мира. Традиционное понимание грубости и робастности в современной литературе определяет робастность [7, 8] как способность систем сохранять те или иные свойства не единственной системы, а множества систем, определенных тем или иным способом, а грубость как свойство систем сохранять качественную картину разбиения фазового пространства на траектории при малом возмущении топологии, при рассмотрении близких по виду уравнений систем.

Концепция подобия, используемая при конструировании критериальных матриц [9-13], сводит исследование вынужденных составляющих переменных многомерной системы к анализу линейной алгебраической задачи, связывающей вектор данной переменной с вектором начального состояния источника экзогенного воздействия с помощью критериальной матрицы, параметризованной временем или частотой внешнего гармонического воздействия. Последнее обстоятельство позволяет задачу оценки и обеспечения робастности многомерных систем при экзогенном конечномерном воздействии, под которой понимается малая чувствительность показателей качества к вариациям параметров структурных компонентов систем, свести к проблеме робастности линейной алгебраической задачи. Использование сингулярного разложения критериальных матриц многомерных систем позволяет на экстремальных элементах алгебраического спектра сингулярных чисел и сингулярных базисов построить мажорантные и минорантные эллипсоидные характеристики исследуемых систем по состоянию, выходу и ошибке.

Авторами выделяется постановка задачи оценки параметрической чувствительности континуума эллипсоидных характеристик многомерных систем управления по состоянию, выходу и ошибке: оценка подпространств максимальной и минимальной чувствительности, для чего вводятся эллипсоидные оценки функций чувствительности по состоянию, выходу и ошибке в виде скалярных мажорант и минорант этих функций. Конструирование оценок осуществляется с использованием сингулярного разложения [14] матриц параметрической чувствительности.

За базовый показатель робастности в частотной области принято частотное число обусловленности, то есть число обусловленности критериальной матрицы линейной алгебраической задачи, в качестве которой используется частотная передаточная матрица вход-выход многомерной системы.

Появление тенденции «робастизации» в развитии теории управления не случайно, она продиктована необходимостью рассмотрения современных сложных систем управления (не только традиционных систем автоматического управления, а более широкого класса синергетических систем управления различной природы) в динамике, со всеми возможными изменениями и возмущениями в реальных условиях функционирования и развития (эволюции). В настоящее время наиболее рассмотрены и решены вопросы робастной устойчивости.

Первые работы по анализу и синтезу грубых (малочувствительных) систем были связаны с развитием теории чувствительности [1]. К настоящему времени недостаточно рассмотрены вопросы построения робастных и грубых нелинейных систем управления.

Методы частотного направления робастной устойчивости

Предлагается новый взгляд на традиционные методы и средства исследования многомерных систем управления, в особенности в частотном направлении теории робастности для многомерных систем. К их числу относятся частотные передаточные матрицы и конструируемые на их основе частотные характеристики. Задача конструирования частотных передаточных матриц решается с использованием концепции подобия вынужденной составляющей состояния многомерной системы состоянию источника конечномерного экзогенного воздействия. При этом матрица преобразования подобия ищется как решение матричного уравнения Сильвестра [15].

Рассматривается линейная многомерная непрерывная система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{g}(t);\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0;\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t); \qquad (1)$$

где $\mathbf{x}(\mathrm{t})$ – вектор состояния, $\mathbf{y}(\mathrm{t})$ – вектор выхода, $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{g}(t) - \mathbf{y}(t) -$ ошибка по выходу, $\mathbf{g}(\mathrm{t})$ – экзогенное конечномерное воздействие, $\mathbf{x} \in R^n$; $\mathbf{g}, \mathbf{y} \in R^n$; $\mathbf{F} \in R^{n\times n}$, $\mathbf{G}, \mathbf{C}^{\mathbf{T}} \in R^{n\times m}$, где $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathrm{C}$ – соответственно, матрицы состояния, входа и выхода системы (1).

Как известно, пользователей проектируемых систем интересуют такие частотные показатели, как полоса пропускания отношения вход-выход на уровне заданного значения амплитудной частотной характеристики, показатель колебательности, полоса пропускания отношения вход-ошибка на уровне требуемого значения относительной частотной ошибки и так далее.

Для конструирования частотных передаточных матриц воспользуемся положениями следующего утверждения.

Утверждение 1. Пусть $\mathbf{g}(\mathrm{t})$ – конечномерное задающее воздействие, которое генерируется с помощью автономной конечномерной системы минимальной размерности

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \mathrm{E}\boldsymbol{z}(t);\ \mathbf{z}(0);\ \mathbf{g}(t) = \mathbf{H}\mathbf{z}(t);\ \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I};\ \mathbf{z}(t) = \exp(\mathbf{E}\boldsymbol{t})\mathbf{z}(0), \qquad (2)$$

где $\mathbf{z} \in R^l, \mathbf{E} \in R^{l\times l}, \mathbf{H} \in R^{m\times l}, \mathbf{g} \in R^m$. Тогда становятся справедливыми представления

$$\mathbf{x}(\mathrm{t})=\exp(\mathbf{F}\mathrm{t})\mathbf{x}(0)+(\mathbf{T}\exp(\mathbf{E}\mathrm{t})-\exp(\mathbf{F}\mathrm{t})\mathbf{T})\mathbf{z}(0),$$

$$\mathbf{y}(\mathrm{t})=\mathbf{C}\mathbf{x}(\mathrm{t})=\mathbf{C}\exp(\mathbf{F}\mathrm{t})\mathbf{x}(0)+\mathbf{C}(\mathbf{T}\exp(\mathbf{E}\mathrm{t})-\exp(\mathbf{F}\mathrm{t})\mathbf{T})\mathbf{z}(0),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathrm{t})=\mathbf{g}(\mathrm{t})-\mathbf{y}(\mathrm{t})=(\mathbf{P}-\mathbf{C}\mathbf{T})\exp(\mathbf{E}\mathrm{t})\mathbf{z}(0)-\mathbf{C}\exp(\mathbf{F}\mathrm{t})(\mathbf{x}(0)-\mathbf{T}\mathbf{z}(0)),$$

где матрица **T** удовлетворяет матричному уравнению Сильвестра

$$\mathbf{TE} - \mathbf{FT} = \mathbf{GH}. \quad \square \qquad (3)$$

Доказательство утверждения приведено в [9-12].

Для построения мажоранты и миноранты амплитудно-частотных характеристик по выходу **y**(t)=**y**(t,ω) и ошибке **ε**(t)=**ε**(t,ω) многомерной непрерывной системы (1) используются модельное представление (2) источника внешнего векторного гармонического воздействия с матричными компонентами вида

$$\mathbf{E} = diag\left\{\mathbf{E}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix};\ \ i = \overline{1,m}\right\}, \mathbf{H} = \mathbf{I}_{\mathbf{m}\times\mathbf{m}} \otimes [1 \quad 0],$$

где $\mathbf{I}_{m\times m}$ – единичная $(m \times m)$ –матрица, ω –частота внешнего гармонического воздействия, приложенного ко всем входам системы (1), $\otimes$ – символ кронекеровского произведения матриц, а также используются положения следующего утверждения.

Утверждение 2. Мажоранты $\mathrm{M_{yM}}(\omega)$,$\delta_\mathrm{M}(\omega)$ и миноранты $\mathrm{M_{ym}}, \delta_\mathrm{m}(\omega)$ амплитудно-частотных характеристик по выходу **y**(t)=**y**(t,ω) и ошибке **ε**(t)=**ε**(t,ω) многомерной непрерывной системы удовлетворяют оценочным неравенствам, принимающим для внешнего векторного гармонического воздействия вид

$$\mathrm{M_{ym}}(\omega) \le \frac{\|\mathbf{y}(\mathrm{t},\omega)\|}{\|\mathbf{z}(0)\|} = \frac{\|\mathbf{y}(\omega)\|}{\|\mathbf{z}(0)\|} \le \mathrm{M_{yM}}(\omega), \forall\omega,\ \mathrm{M_{ym}}(\omega), \mathrm{M_{yM}}(\omega) \in \sigma_\alpha\{\mathbf{CT}(\omega)\},$$

$$\delta_\mathrm{m}(\omega) \le \frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathrm{t},\omega)\|}{\|\mathbf{z}(0)\|} = \frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)\|}{\|\mathbf{z}(0)\|} \le \delta_\mathrm{M}(\omega), \forall\omega,\ \delta_\mathrm{m}(\omega), \delta_\mathrm{M}(\omega) \in \sigma_\alpha\{\mathbf{P} - \mathbf{CT}(\omega)\},$$

в которых $\sigma_\alpha\{*\}$ – алгебраический спектр сингулярных чисел матриц (*), $(\circ)_M$ и $(\circ)_m$ означают максимальное и минимальное значения сингулярных чисел, частотная передаточная матрица $\mathbf{T}(\omega)$ путем решения уравнения Сильвестра (6) принимает вид

$$\mathbf{T}(\omega) = -(\omega^2\mathbf{I} + \mathbf{F}^2)^{-1}\mathrm{row}\{[\mathbf{F}\mathbf{G}_\mathrm{i} \quad \omega\mathbf{G}_\mathrm{i}]\};\ \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{m}};$$

где ω – частота задающего внешнего векторного гармонического воздействия.

Доказательство утверждения приведено в [9-12].

Мажоранты $\mathrm{M_{yM}}(\omega)$,$\delta_\mathrm{M}(\omega)$ и миноранты $\mathrm{M_{ym}}, \delta_\mathrm{m}(\omega)$ амплитудно-частотных характеристик по выходу **y**(t)=**y**(t,ω) и ошибке **ε**(t)=**ε**(t,ω) в утверждении 2 получены [9] путем сведения исследования многомерных систем управления к векторно-**Ошибка! Закладка не определена.**матричному представлению, параметризованному скалярами t и ω.

$$\boldsymbol{\kappa}(\tau) = \boldsymbol{\Pi}(\tau)\boldsymbol{\chi}(\tau),\ \forall\tau, \tau = t, \omega, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\kappa} \in R^\rho, \boldsymbol{\chi} \in R^\nu, \boldsymbol{\Pi} \in R^{\rho\times\nu}$ – некоторая критериальная матрица, τ может принимать смысл непрерывного времени t, ω – частоты источника внешнего гармонического воздействия. Пусть матрица $\boldsymbol{\Pi}(\tau)$ имеет в силу сингулярного разложения представление

$$\boldsymbol{\Pi}(\tau) = \mathbf{U}(\tau)\boldsymbol{\Sigma}(\tau)\mathbf{V}^\mathbf{T}(\tau)\ , \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\Sigma}(\tau)$ – $(\rho \times \nu)$ диагональная матрица, имеющая на главной диагонали сингулярные числа матрицы $\boldsymbol{\Pi}(\tau)$, $\mathbf{U}(\tau)$ – ортогональная $(\rho \times \rho)$ матрица, столбцы которой образуют левый сингулярный базис матрицы $\boldsymbol{\Pi}(\tau)$, $\mathbf{V}(\tau)$–ортогональная $(\nu \times \nu)$ матрица, столбцы которой образуют правый сингулярный базис матрицы $\boldsymbol{\Pi}(\tau)$. Если в (5) перейти к евклидовым векторным нормам, то становятся справедливыми оценочные неравенства

$$\alpha_m(\tau) \le \|\boldsymbol{\kappa}(\tau)\|/\|\boldsymbol{\chi}(\tau)\| \le \alpha_M(\tau),\ \forall\tau, \tag{6}$$

где $\alpha_m(\tau), \alpha_M(\tau)$ – экстремальные элементы алгебраического спектра $\sigma_\alpha\{\boldsymbol{\Pi}(\tau)\}$ сингулярных чисел матрицы $\boldsymbol{\Pi}(\tau)$. Наибольшее и наименьшее сингулярные числа $\alpha_M(\tau), \alpha_m(\tau)$ матрицы $\boldsymbol{\Pi}(\tau)$ в (6) однозначно определяют на матрице правых сингулярных векторов $\mathbf{V}(\tau)$ те из них, которые на сфере $\|\boldsymbol{\chi}(\tau)\| = fix$ отображаются в наибольшую и наименьшую полуоси эллипсоида, получаемого с помощью (4), причем длины этих полуосей $\alpha_M(\tau)\|\boldsymbol{\chi}(\tau)\|$ и $\alpha_m(\tau)\|\boldsymbol{\chi}(\tau)\|$ соответственно.

Таким образом, знание алгебраических спектров сингулярных чисел $\mathrm{M_{ym}}(\omega), \mathrm{M_{yM}}(\omega) \in \sigma_\alpha\{\mathbf{CT}(\omega)\}$ позволяет охватить практически весь круг проблем исследования многомерных систем при гармоническом внешнем воздействии в установившемся режиме в скалярной постановке, а использование правого и левого сингулярного базисов в сингулярном разложении матриц $\mathbf{CT}(\omega)$ и $\mathbf{P}$-$\mathbf{CT}(\omega)$ позволяют дать прозрачную геометрическую интерпретацию.

Конструирование частотных передаточных матриц непрерывных многомерных систем для случая многочастотного экзогенного воздействия

Источник непрерывного многочастотного векторного гармонического воздействия (2) будет иметь в качестве матрицы состояния матрицу определенного вида для случая вещественнозначного воздействия.

Утверждение 3. Для непрерывного многочастотного вещественнозначного векторного гармонического воздействия матрица $\mathbf{T}(\Omega)$ как решение уравнения Сильвестра

$$\mathbf{T}(\Omega)\mathbf{E}(\Omega) - \mathbf{FT}(\Omega) = \mathbf{GH}$$

может быть записана в форме

$$\mathbf{T}(\Omega) = row\{[\mathbf{T}_{2i-1} \quad \mathbf{T}_{2i}]\} = row\{-(\omega_i^2\mathbf{I} + \mathbf{F}^2)^{-1}[\mathrm{F}\mathbf{G}_i \quad \omega_i\mathbf{G}_i], i = \overline{1,m}\}. \square \quad (7)$$

Доказательство утверждения приведено в [9-11].

Утверждения 1-3 служат для построения мажоранты и миноранты амплитудно-частотных характеристик по выходу $\mathbf{y}(\mathrm{t})$ и ошибке $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathrm{t})$ многомерной непрерывной системы, а также для случая многочастотного векторного гармонического воздействия. При этом исходным условием для их вычислений является сведение исследуемой проблемы к линейной алгебраической задаче вида (4), связывающей вектор начального состояния источника внешнего гармонического воздействия с выходом $\mathbf{y}(\mathrm{t})$ и ошибкой $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathrm{t})$, а матрица, подлежащая сингулярному разложению, как указано в Утверждении 2, принимает вид $\mathbf{CT}$ и $\mathbf{P}$-$\mathbf{CT}$.

Оценка робастности непрерывных многомерных систем

В проблемно ориентированном виде робастность авторами понимается как малая чувствительность качества процессов в многомерных непрерывных системах к вариациям параметров их структурных элементов при конечномерном внешнем воздействии.

В этой связи в работе исследуется параметрическая чувствительность эллипсоидных показателей качества многомерных непрерывных систем в постановке, когда диапазон вариаций параметров системы допускает применение аппарата теории чувствительности в пределах возможностей функций чувствительности первого порядка.

Робастность как малая чувствительность линейной алгебраической задачи

Оценки эллипсоидных характеристик многомерных непрерывных систем в форме мажорант и минорант этих характеристик были получены путем сведения проблемы к линейной алгебраической задаче. В силу этого обстоятельства становится естественным рассмотрение робастности многомерных систем при внешнем векторном гармоническом воздействии как малой чувствительности линейной алгебраической задачи

$$\boldsymbol{\kappa}(\tau, q) = \boldsymbol{\Pi}(\tau, q)\boldsymbol{\chi}(0), \boldsymbol{\chi}(0) = \boldsymbol{\chi}(t = 0), \quad (8)$$

$\mathbf{q}$ – p-мерный вектор изменяющихся квазистационарных параметров с номинальным значением $\mathbf{q}_0$, для которого

$$\boldsymbol{\kappa}(t, \omega, q = q_0) = \boldsymbol{\kappa}(t, \omega);\ \boldsymbol{\Pi}(t, \omega, q = q_0) = \boldsymbol{\Pi}(t, \omega). \quad (9)$$

При конечномерном экзогенном воздействии исследование линейной алгебраической задачи (8) может быть сведено к исследованию стационарной по t задаче

$$\boldsymbol{\kappa}(\omega, q) = \boldsymbol{\Pi}(\omega)\boldsymbol{\chi}(0). \quad (10)$$

Таким образом, опираясь на описывающие линейную алгебраическую задачу соотношения (8)÷(10), можно осуществить анализ чувствительности линейной алгебраической задачи (10) к вариации ее векторных и матричных компонентов, порождаемых вариацией $\Delta\mathbf{q}$ вектора первичных физических параметров $\mathbf{q}$ относительно номинального значения $\mathbf{q}_0$ в двух постановках.

В первой постановке векторные элементы (10) представляются соответственно в левом и правом сингулярных базисах матрицы $\mathbf{\Pi}(\omega)$, при этом задача исследования чувствительности (10) сводится к анализу чувствительности сингулярных чисел, а также элементов левого и правого сингулярных базисов $\mathbf{\Pi}(\omega)$.

Во второй постановке оценивается норма приращения $\Delta\boldsymbol{\kappa}(\omega)$ вектора $\boldsymbol{\kappa}(\omega)$, порожденного приращениями $\Delta\mathbf{\Pi}(\omega)$ матрицы $\mathbf{\Pi}(\omega)$ и $\Delta\boldsymbol{\chi}(0)$ вектора $\boldsymbol{\chi}(0)$ относительно их номинальных реализаций, порожденных вариациями совокупности первичных параметров. В такой постановке переход от норм приращений к их относительным значениям $\delta(\circ) \triangleq \|\Delta(\circ)\|/\|(\circ)\|$ позволяет оценить относительную ошибку решения линейной задачи (10) в прямой или инверсной формах с помощью числа обусловленности $C\{\mathbf{\Pi}(\omega)\}$ матрицы $\mathbf{\Pi}(\omega)$.

Конструирование функций чувствительности мажорантных и минорантных характеристик непрерывных многомерных систем

При конструировании функций параметрической чувствительности мажорантных и минорантных частотных характеристик непрерывной многомерной системы будем полагать, что зависящее от вектора параметров $\mathbf{q}$ векторно-матричное представление последней имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{g}(t);\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(\mathbf{q})x(t), \tag{11}$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{q})_{|\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = \mathbf{F};\ \mathbf{G}(\mathbf{q})_{|\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = \mathbf{G},\ \mathbf{C}(\mathbf{q})_{|\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = \mathbf{C}$.

Очевидно, зависимость от вектора параметров q матричных элементов непрерывной многомерной системы (11) порождает зависимость от этого вектора мажорантных и минорантных амплитудных частотных характеристик системы.

Ограничимся в дальнейшем амплитудными частотными характеристиками отношения вход-выход и относительной частотной ошибкой. Тогда для мажорантных и минорантных частотных характеристик системы (11) можно записать

$$M_{yM}(\omega,\mathbf{q}) = \alpha_M\{\mathbf{\Pi}_y(\omega,\mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q})\mathbf{T}(\omega,\mathbf{q})\}, \tag{12}$$

$$M_{ym}(\omega,\mathbf{q}) = \alpha_m\{\mathbf{\Pi}_y(\omega,\mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q})\mathbf{T}(\omega,\mathbf{q})\}, \tag{13}$$

$$\delta_M(\omega,\mathbf{q}) = \alpha_M\{\mathbf{\Pi}_\varepsilon(\omega,\mathbf{q}) = \mathbf{H} - \mathbf{C}(\mathbf{q})\mathbf{T}(\omega,\mathbf{q})\}, \tag{14}$$

$$\delta_m(\omega,\mathbf{q}) = \alpha_m\{\mathbf{\Pi}_\varepsilon(\omega,\mathbf{q}) = \mathbf{H} - \mathbf{C}(\mathbf{q})\mathbf{T}(\omega,\mathbf{q})\}. \tag{15}$$

В выражениях (12) - (15) матрица $\mathbf{T}(\omega,\mathbf{q})$ является решением матричного уравнения Сильвестра

$$\mathbf{T}(\omega,\mathbf{q})\mathbf{E}(\mathbf{q}) - \mathbf{F}(\mathbf{q})\mathbf{T}(\omega,\mathbf{q}) = \mathbf{G}\mathbf{H}(\mathbf{q})\ . \tag{16}$$

Функции чувствительности мажорантных и минорантных частотных характеристик (12) - (15) к вариации j-го элемента $\mathbf{q}_j$ вектора параметров $\mathbf{q}$ в силу определения получают представления

$$M_{yMq_j}(\omega) \triangleq \frac{\partial}{\partial q_j} M_{yM}(\omega,q)_{|\,\mathrm{q}=q_0} = \frac{\partial}{\partial q_j}\alpha_M\{\mathbf{\Pi}_y(\omega,q)\}_{|\,\mathrm{q}=q_0}, \tag{17}$$

$$M_{ymq_j}(\omega) \triangleq \frac{\partial}{\partial q_j} M_{ym}(\omega,q)_{|\,\mathrm{q}=q_0} = \frac{\partial}{\partial q_j}\alpha_m\{\mathbf{\Pi}_y(\omega,q)\}_{|\,\mathrm{q}=q_0}, \tag{18}$$

$$\delta_{Mq_j}(\omega) \triangleq \frac{\partial}{\partial q_j} \delta_M(\omega,q)_{|\,\mathrm{q}=q_0} = \frac{\partial}{\partial q_j}\alpha_M\{\mathbf{\Pi}_\varepsilon(\omega,q)\}_{|\,\mathrm{q}=q_0}, \tag{19}$$

$$\delta_{mq_j}(\omega) \triangleq \frac{\partial}{\partial q_j} \delta_m(\omega,q)_{|\,\mathrm{q}=q_0} = \frac{\partial}{\partial q_j}\alpha_m\{\mathbf{\Pi}_\varepsilon(\omega,q)\}_{|\,\mathrm{q}=q_0}\ . \tag{20}$$

Нетрудно видеть, что функции чувствительности, определенные соотношениями (17)÷(20), оказываются заданными на функциях чувствительности элементов сингулярного разложения соответствующих критериальных матриц. Все функции параметрической чувствительности (17)÷(20) зависят от частоты ω внешнего гармонического воздействия $\mathbf{g}(t)$ многомерной непрерывной системы (1), а потому они справедливо могут быть названы частотными функциями чувствительности.

Алгоритм 1 оценки чувствительности мажорантных и минорантных частотных характеристик.

Решение уравнение Сильвестра при номинальном значении $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ вектора параметров относительно матрицы $\mathbf{T}(\omega)$. Конструирование критериальных матриц

$$\mathbf{\Pi}_y(\omega) = \mathbf{CT}(\omega);\ \mathbf{\Pi}_\varepsilon(\omega) = \mathbf{H} - \mathbf{CT}(\omega). \tag{21}$$

1. Конструирование сингулярных разложений матриц (21)

$$\mathbf{\Pi}_y(\omega) = \mathbf{U}(\omega)\mathbf{\Sigma}(\omega)\mathbf{V}^T(\omega);\ \mathbf{\Pi}_\varepsilon(\omega) = \mathbf{U}_\varepsilon(\omega)\mathbf{\Sigma}_\varepsilon(\omega)\mathbf{V}_\varepsilon^T(\omega)\,. \tag{22}$$

2. Вычисление матриц чувствительности $\mathbf{\Pi}_{yq_j}(\omega)$ и $\mathbf{\Pi}_{\varepsilon q_j}(\omega)$ с помощью соотношений

$$\mathbf{\Pi}_{yq_j}(\omega) = \mathbf{C}_{q_j}\mathbf{T}(\omega) + \mathbf{CT}_{q_j}(\omega); \mathbf{\Pi}_{\varepsilon q_j}(\omega) = -\mathbf{\Pi}_{yq_j}(\omega)\,, \tag{23}$$

где $\mathbf{T}_{q_j}(\omega)$ матрица сепаратной чувствительности вычисляется с помощью матричного уравнения Сильвестра

$$\mathbf{T}_{q_j}(\omega)\mathbf{E}(\omega) + \mathbf{FT}_{q_j}(\omega) = \mathbf{G}_{q_j}\mathbf{H} + \mathbf{F}_{q_j}\mathbf{T}(\omega). \tag{24}$$

3. Конструирование матриц $\mathbf{S}_{y_j}(\omega)$ и $\mathbf{S}_{\varepsilon_j}(\omega)$ в силу соотношений

$$\mathbf{S}_{y_j}(\omega) = \mathbf{U}^T(\omega)\mathbf{\Pi}_{yq_j}(\omega)\mathbf{V}(\omega)\,; \mathbf{S}_{\varepsilon_j}(\omega) = \mathbf{U}_{\varepsilon j}^T(\omega)\mathbf{\Pi}_{\varepsilon q_j}(\omega)\mathbf{V}_\varepsilon(\omega)\,. \tag{25}$$

4. Конструирование функций чувствительности мажорантных и минорантных амплитудных частотных характеристик вход-выход и относительной частотной ошибки с помощью (17) - (20)

$$M_{yMq_j}(\omega) = \left(\mathbf{S}_{y_j}(\omega)\right)_{MM};\ \ M_{ymq_j}(\omega) = \left(\mathbf{S}_{y_j}(\omega)\right)_{mm}, \tag{26}$$

$$\delta_{Mq_j}(\omega) = \left(\mathbf{S}_{\varepsilon_j}(\omega)\right)_{MM};\ \delta_{mq_j}(\omega) = \left(\mathbf{S}_{\varepsilon_j}(\omega)\right)_{mm}. \tag{27}$$

5. Вычисление конечных вариаций мажорантных и минорантных частотных характеристик многомерной непрерывной системы (1), порожденных конечной вариацией $\Delta\mathbf{q}_j$ j –го компонента $\mathbf{q}_j$ вектора параметров $\mathbf{q}$

$$\Delta M_{yM_j}(\omega) = M_{yM_{q_j}}(\omega)\Delta\mathbf{q}_j;\ \ \Delta M_{ym_j}(\omega) = M_{ym_{q_j}}(\omega)\Delta\mathbf{q}_j\,, \tag{28}$$

$$\Delta\delta_{M_j}(\omega) = \delta_{M_{q_j}}(\omega)\Delta\mathbf{q}_j;\quad \Delta\delta_{m_j}(\omega) = \delta_{m_{q_j}}(\omega)\Delta\mathbf{q}_j. \tag{29}$$

Замечание. В связи с тем, что существует явное вещественнозначное решение матричного уравнения Сильвестра (16)

$$\mathbf{T}(\omega,\mathbf{q}) = -\left(\omega^2\mathbf{I} + \mathbf{F}^2(\mathbf{q})\right)^{-1}\mathrm{row}\{[\mathbf{F}(\mathbf{q})\mathbf{G}_i(\mathbf{q})\quad \omega\mathbf{G}_i(\mathbf{q})],\ i = \overline{1,m}\}\quad, \tag{30}$$

то альтернативой вычислению матрицы сепаратной чувствительности $\mathbf{T}_{q_j}$ в п.3 алгоритма с помощью решения матричного уравнения (24) является непосредственное дифференцирование (30) по $\mathbf{q}_j$, что дает для $\mathbf{T}_{q_j}$ представление

$$\mathbf{T}_{q_j}(\omega) = -(\omega^2\mathbf{I} + \mathbf{F}^2)^{-1}\left(\mathbf{F}_{q_j}\mathbf{F} + \mathbf{FF}_{q_j}\right)(\omega^2\mathbf{I} + \mathbf{F}^2)^{-1}\mathrm{row}\{[\mathbf{FG}_i\quad \omega\mathbf{G}_i],\ i = \overline{1,m}\} -$$
$$-(\omega^2\mathbf{I} + \mathbf{F}^2)^{-1}\mathrm{row}\{\left[\mathbf{F}_{q_j}\mathbf{G}_i + \mathbf{FG}_{q_j}\quad \omega\mathbf{G}_{q_j}\right],\ i = \overline{1,m}\}. \tag{31}$$

Необходимо заметить, что полученные частотные функции чувствительности непрерывных многомерных систем содержательно подобны функциям траекторной чувствительности во временной области [16].

Чувствительность линейной алгебраической задачи к вариациям совокупности параметров. Частотные числа обусловленности

Рассмотрим возмущение линейной алгебраической задачи, порожденное приращением $\Delta\mathbf{q}$ совокупности первичных физических параметров, приводящих к вариации

$\Delta\mathbf{\Pi}(t,\omega,\mathbf{q}_0,\Delta\mathbf{q})$ матрицы $\mathbf{\Pi}(t,\omega,\mathbf{q}_0)\triangleq\mathbf{\Pi}(t,\omega)$, а также приращением $\Delta\boldsymbol{\chi}(0)$ вектора $\boldsymbol{\chi}(0)$ начального состояния источника экзогенного гармонического воздействия. Вариации $\Delta\mathbf{\Pi}(t,\omega,\mathbf{q}_0,\Delta\mathbf{q})$ и $\Delta\boldsymbol{\chi}(0)$ порождают вариацию $\Delta\boldsymbol{\kappa}(t,\omega)$, определяемую векторно-матричным соотношением

$$\Delta\boldsymbol{\kappa}(t,\omega)=\Delta\mathbf{\Pi}(t,\omega,\mathbf{q}_0,\Delta\mathbf{q})\chi(0)+\mathbf{\Pi}(t,\omega)\Delta\boldsymbol{\chi}(0)+\Delta\mathbf{\Pi}(t,\omega,\mathbf{q}_0,\Delta\mathbf{q})\Delta\boldsymbol{\chi}(0) \qquad (32)$$

Переход в (32) к соотношению по согласованным матричным и векторным нормам приводит к неравенству

$$\begin{gathered}\|\Delta\boldsymbol{\kappa}(t,\omega)\|\le\|\Delta\mathbf{\Pi}(t,\omega,\mathbf{q}_0,\Delta\mathbf{q})\|\cdot\|\boldsymbol{\chi}(0)\|+\|\mathbf{\Pi}(t,\omega)\|\cdot\|\Delta\boldsymbol{\chi}(0)\|+\\+\|\Delta\mathbf{\Pi}(t,\omega,\mathbf{q}_0,\Delta\mathbf{q})\|\cdot\|\Delta\boldsymbol{\chi}(0)\|\,.\end{gathered} \qquad (33)$$

Введем в рассмотрение относительные значения вариаций векторных и матричных компонентов линейной задачи (33), определив ее соотношениями

$$\delta_\kappa(t,\omega)\triangleq\frac{\|\Delta\boldsymbol{\kappa}(t,\omega)\|}{\|\boldsymbol{\kappa}(t,\omega)\|};\ \delta_\chi(0)\triangleq\frac{\|\Delta\boldsymbol{\chi}(0)\|}{\|\boldsymbol{\chi}(0)\|};\ \delta_\Pi(t,\omega)\triangleq\frac{\|\Delta\mathbf{\Pi}(t,\omega,\mathbf{q}_0,\Delta\mathbf{q})\|}{\|\mathbf{\Pi}(t,\omega)\|}. \qquad (34)$$

Сформулируем на основе рассмотрения номинальной версии линейной алгебраической задачи оценку

$$\|\Delta\boldsymbol{\kappa}(t,\omega)\|\ge\frac{\|\boldsymbol{\chi}(0)\|}{\|\mathbf{\Pi}^{+}(t,\omega)\|}, \qquad (35)$$

где $(\circ)^{+}$ – матрица псевдообратная исходной $(\circ)$.

Нетрудно видеть, что (33), (34), и (35) позволяют сконструировать оценку

$$\delta_\kappa(t,\omega)\le\|\mathbf{\Pi}(t,\omega)\|\cdot\|\mathbf{\Pi}^{+}(t,\omega)\|\{\delta_\chi(0)+\delta_\Pi(t,\omega)+\delta_\chi(0)\delta_\Pi(t,\omega)\} \qquad (36)$$

Нетрудно видеть, что мультипликативная конструкция из матричных норм $\|\mathbf{\Pi}(t,\omega)\|\cdot\|\mathbf{\Pi}^{+}(t,\omega)\|$ представляет собой число обусловленности $C\{\mathbf{\Pi}(t,\omega)\}$ матрицы $\mathbf{\Pi}(t,\omega)$. В связи с этим, используя обозначения

$$C\{\mathbf{\Pi}(t,\omega)\}\triangleq\|\mathbf{\Pi}(t,\omega)\|\cdot\|\mathbf{\Pi}^{+}(t,\omega)\|, \qquad (37)$$

неравенство (36) можно записать в виде

$$\delta_\kappa(t,\omega)\le C\{\mathbf{\Pi}(t,\omega)\}\{\delta_\chi(0)+\delta_\Pi(t,\omega)+\delta_\chi(0)\delta_\Pi(t,\omega)\}\,. \qquad (38)$$

Неравенство (38) обнаруживает, что число обусловленности критериальной матрицы $\mathbf{\Pi}(t,\omega)$ линейной алгебраической задачи, как один из скалярных неинвариантов представляет собой коэффициент усиления относительных погрешностей при возмущении векторных и матричных компонентов линейной задачи.

Если в дальнейшем ограничиваться вход-выходными отношениями непрерывной многомерной системы (1), то $\mathbf{\Pi}(\omega)$ оказывается частотной передаточной матрицей этого отношения. Экстремальные элементы ее алгебраического спектра сингулярных чисел являются мажорантной $M_{yM}(\omega)$ и минорантной $M_{ym}(\omega)$ амплитудными частотными характеристиками этого отношения. В связи со сказанным можно ввести в рассмотрение число обусловленности $C_y(\omega)$ отношения вход-выход (частотной передаточной матрицы вход-выход), определенное соотношением

$$C_y(\omega)\triangleq\frac{M_{yM}(\omega)}{M_{ym}(\omega)}. \qquad (39)$$

Нетрудно видеть, что частотное число обусловленности $C_y(\omega)$ отношения вход-выход многомерных систем как функция частоты ω являются элементом функционального пространства $L^{P}_{\Delta\Omega}$, где $p\to\infty$, $\Delta\Omega=[\omega\colon 0\le\omega\le\infty]$ для непрерывных систем. Норма $\|C_y(\omega)\|_{p\to\infty}$ частотного числа обусловленности как элемента функционального пространства определяется соотношением

$$\|C_y(\omega)\|_\infty=\sup_{\omega\in\Delta\Omega}C_y(\omega)\,. \qquad (40)$$

Задача синтеза многомерных частотно робастных непрерывных систем в классе хорошо обусловленных отношений «вход-выход» может быть решена методами обобщенного модального управления [11,12], доставляющего матрице состояния системы модально-робастное представление. При этом в силу асимптотических свойств оценка частотного числа обусловленности отношения «вход-выход» во всем диапазоне частот экзогенного гармонического воздействия принимает минимальное значение, степень отклонения которого от единицы определяется степенью отклонения от единицы числа обусловленности матрицы собственных векторов.

Заключение

Решена задача исследования чувствительности эллипсоидных характеристик многомерных динамических систем к вариациям параметров с помощью построения эллипсоидных оценок функций чувствительности по состоянию, выходу и ошибке линейных многомерных непрерывных систем с использованием сингулярного разложения матриц, составленных из функций параметрической чувствительности. Концепция подобия позволяет с единых алгоритмических позиций построить частотные передаточные матрицы многомерных систем для одночастотного и многочастотного случаев возбуждения входов систем гармоническим экзогенным воздействием для решения задачи синтеза частотно робастных систем.

Подход позволяет исследовать чувствительности\ь эллипсоидных характеристик многомерных динамических систем во временной области.

Литература

1. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления. – М.: Наука, 1981. – 464 с.
2. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники./ Сер. Техническая кибернетика. – Т.32. –М.: ВИНИТИ, 1991. – С. 3–31.
3. Джури Э.И. Робастность дискретных систем // Автоматика и телемеханика. – 1990. – №5. – С.4–28.
4. Оморов Р.О. Робастность интервальных динамических систем. I. Робастность непрерывных линейных интервальных динамических систем//Теория и системы управления. –1995. – №1. – С. 22–27.
5. Оморов Р.О. Робастность интервальных динамических систем. II. Робастность дискретных линейных интервальных динамических систем//Теория и системы управления. – 1995. – №3. – С. 3–7.
6. Оморов, Р. О. Максимальная грубость динамических систем / Р. О. Оморов // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 8. – С. 36–45.
7. Оморов Р.О. Метод топологической грубости динамических систем: Приложения к синергетическим системам // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2020. – Т. 20. № 2. – С. 257–262.
8. Оморов Р.О. Алгебраический метод исследования робастности интервальных динамических систем //Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2020. – Т.20. № 3. – С. 364 – 370.
9. Ушаков А.В. Модальные оценки качества процессов управления многомерными системами при гармоническом внешнем воздействии. // Автоматика и телемеханика. – 1989. –№11. – С. 76–85.
10. Акунов Т.А., Алишеров С., Оморов Р.О., Ушаков А.В. Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах. – Бишкек: Илим, 1991. – 59 с.
11. Ушаков А.В. Обобщенное модальное управление // Изв. вузов. Приборостроение, 2000. – Т.43, №3. – С. 8–16.
12. Т. А. Акунов, С. А. Сударчиков, А. В. Ушаков Обеспечение стабильности показателей качества в задачах управления динамическим объектом с интервальными параметрами при конечномерном экзогенном воздействии //Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. – 2005. – № 19. – С. 60–66.

13. Ушаков А.В., Акунова А., Оморов Р.О., Акунов Т.А. Робастные многомерные системы управления: Частотные и алгебраические методы / Под ред. Р.О. Оморова. – Бишкек: Илим, 2022. – 352 с.
14. Хорн Р., Джонсон Дж. Матричный анализ./ Пер. с англ.– М.: Мир, 1980. – 655 с.
15. Акунов Т.А., Алишеров С., Оморов Р.О., Ушаков А.В. Матричные уравнения в задачах управления и наблюдения непрерывными объектами. – Бишкек: Илим, 1991. – 61 с.
16. Оморов Р.О., Акунов Т.А., Айдралиев А.О. Эллипсоидные оценки траекторной чувствительности многомерных процессов на основе обобщенной проблемы сингулярных чисел // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2022. – Т. 22. № 2. – С. 239–245.