УДК 517.9.92.949

Темиров Б.К., Баратова Б.Ш., Сапарова А.Б., Асанова Ж.Т., Нурлан кызы Жылдыз
Кыргызский национальный университет имени Жусупа Баласагына

ОСЦИЛЛЯЦИЯ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА С НЕЛИНЕЙНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ЧЛЕНОМ

Применен метод перехода интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка с оператором Лапласа с нелинейным интегральным членом к разностным уравнениям и неравенствам, основанным на усреднении неизвестной функции по пространственным переменным, и использованы результаты Я.В. Быкова, Г.Д. Мерзлякова, Е.И. Шевцова (1). С конечными разностями первого порядка рассмотрены в (2), второго и четвертого порядка в (3). В данной статье изучаются осцилляционные свойства решений линейного интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка с оператором Лапласа с нелинейным интегральным членом и установлены достаточные условия осцилляции решений рассматриваемого уравнения. Такие уравнения ранее не изучались.

Ключевые слова: разность, конечная разность, интегро-дифференциально-разностные уравнения, дифференциальный оператор, оператор Лапласа, осцилляция нелинейным интегральным членом.

В данной статье изучаются осцилляционные свойства решений линейного интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка с оператором Лапласа с нелинейным интегральным членом и установлены достаточные условия осцилляции решений рассматриваемого уравнения или $\lim\limits_{n\to\infty} y(n) = 0$.

Рассмотрим уравнение в виде

$$L_3[U(n,x)] + a(n)\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 U[h(n),x]}{\partial x_k^2} + A_1(n,x)U[h(n),x] +$$
$$+A_2(n,x)U[h_1(n),x] + \int\limits_Q K(n,x,y)U[\tau(n),y]dy +$$
$$+A_3(n,x)f\{\textstyle\int_Q N(n,x,y)U[\sigma(n),y]dy\} = 0. \qquad (1)$$

Введем обозначения 1) $QCR^m -$ открытая ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial Q = \overline{\mathrm{Q}}x\Gamma$; 2) $n -$ натуральное число; 3) $x = \left(x_{1,}x_2 \dots x_m\right) \in Q$; 4) $h(n), h_1(n), \delta(n) -$ функции натурального аргумента, значения которых $\forall n \geq n_0$ являются натуральными числами $\forall n \geq n_0$. $\lim\limits_{n\to\infty} h(n) = \lim\limits_{n\to\infty} h_1(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma(n) = \infty$;

5) $\Delta u(n,x) = u(n+1, x - u(n,x)$; 6)$L_0 = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u[h(n),x]}{\partial x_k^2} -$ оператор Лапласа.

Основные предположения: 1) $A(n,x) -$ заданная непрерывная функция по $x \in Q$ для каждого фикцированного натурального числа n, $A(n,x) \in (S)$; 2) $\forall (n,x) \in D_0$, $\forall Z > 0$, $f(n,x,z) > 0$; $f(n,x,-z) < 0$.

Введем обозначения:

$L_1[u(n,x)] = \Delta u(n,x) = u(n+1,x) - u(n,x)$;$L_2[u(n,x)] = \Delta w_2(n), w_2(n) = P_1(n)L_2[u(n,x)]$

$L_3[u(n,x)] = \Delta w_2(n),\ w_2(n) = P_2(n)L_2[u(n,x)] \qquad q_k(n) = \frac{1}{P_k(n)}, k = 1,2$.

Скажем, что выполнены: 1) условие (E_0), если $\forall\,(n,x,y)\in D_0^0$ выполняются неравенства $A_1(n,x)-\lambda_0 a(n)\geq a_1(n)\geq 0,\quad A_2(n,x)\geq a_2(n)\geq 0,\ \int_Q A_3(n,x)\Phi(x)dx\geq a_3(n)\geq 0,\ K(n,x,y)\geq \alpha(n,x)\Phi(y)\geq 0,\ \int_Q \alpha\,(n,x)\Phi(x)dx\geq a_4(n)\geq 0;$

б) условие (E$_1$), если $P_k^0(n)>0,\ \forall n\geq n_0$, то $\sum_{k=1}^{\infty} q_k(m)=\infty,\ k=1{,}2$;

3) $\forall\, z>0$ выполнены условия: а) (T_0), если $f(n,x,z)\geq 0,\ f(n,x,-z)\leq 0;$

в) условие (T_1), если $f(n,x,z)\geq g_0(n)z,\ f(n,x,-z)\leq -g_0(n)z,\ g_0(n)\geq 0.$

Решение изучаемого уравнения рассматривается в классе функций, имеющих непрерывные частные производные второго порядка по $x_1,x_2,...,x_m$ для каждого фиксированного натурального числа $n\geq n_0$. Существование бесконечного множества правильных решений доказывается методом итераций. Будем исходить из следующего:

Определение 1. Всякую функцию $U(n,x)$ называют правильной, если она определена в области $D_0=\{n\geq n_0, x\in Q\}$.

Определение 2. Правильную функцию $U(n,x)$ называют неотрицательной (неположительной), если $\exists\ n\geq n_0$ такое, что $\forall (n,x)\in D_1=\{n\geq n_1, x\in Q\}$,

$$U(n,x)\geq 0,\ \upsilon(n)=\int_Q U(n,x)dx>0,\quad (U(n,x)\leq 0,\ \upsilon(n)=\int_Q U(n,x)dx<0).$$

Определение 3. Правильную функцию $U(n,x)$ называют не осциллирующей, если она либо неотрицательная, либо неположительная, в противном случае называют осциллирующей.

Такие определения понятий осциллируемости и неосциллируемости правильных функций даны в работах $[1{,}2]$.

Известно [6,7], что 1) все собственные значения краевой задачи положительны:

$$L_0У(x)+\lambda У(\mathrm{x})=0,\ \ У(\mathrm{x})\ \ =0.$$

2) наименьшему собственному значению λ$_0$ соответствует единственная нормированная неотрицательная собственная функция $\Phi(\mathrm{x})>0,\ \forall \mathrm{x}\epsilon Q$ нормированная в смысле $\int_Q \Phi(\mathrm{x})\,dx=1.$ Функция $\Phi(\mathrm{x})$ имеет непрерывные частные производные второго порядка $\forall \mathrm{x}\epsilon Q.$ Если область $Q=\{a_k<x_k<b_k, k=1,m\}$ – параллелепипед, то

$$\lambda_0=\sum_{k=1}^{m}\frac{\pi^2}{(b_k-a_k)^2}\ ;\qquad \Phi(x)=l\prod_{k=1}^{m}\sin\frac{\pi(x_k-a_k)}{b_k-a_k}.$$

Если область Q – выпуклая область, то $\lambda_0\geq \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{P}-\frac{m-1}{a^2}\right)$,

где P – радиус наибольшего шара, вписанного в область Q, d – диаметр области Q, m – размерность области Q.

Из второй формулы Грина [7] для оператора Лапласа L_0 вытекает равенство

$$\int_Q[\Phi(x)L_0U(n,x)+\gamma_0 U(n,x)\Phi(x)]dx=-\int_\Gamma U(n,x)\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}d\Gamma,\tag{3}$$

где $\vec{\gamma}$ – единичная внешняя нормаль к поверхности Γ. Очевидно, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}=(\vec{\gamma}grad\Phi).$$

Следствие формулы Грина для оператора Лапласа:

Следствие 1. Для всякой дважды непрерывно дифференцируемой функции $U(n,x)\in(N)$ (символ $U(n,x)\in(N)$ означает, что $U(n,x)\big|_\Gamma=0\ \forall n\geq n_0$) выполняется

$$\int_Q \Phi(x) L_0 U(n,x)dx = -\lambda_0 \int_Q \Phi(x)U(n,x)dx,\ \forall n \ge n_0 .$$

Следствие 2. Для всякой неотрицательной дважды непрерывно дифференцируемой функции $U(n,x)$ выполняется

$$\int_Q \Phi(x) L_0 U(n,x)dx \ge -\lambda_0 \int_Q \Phi(x)U(n,x)dx,\ \forall n \ge n_1 .$$

Так как вектор … направлен … функции …, то векторы … антипараллельны. Поэтому

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} = (\vec{\gamma} grad \Phi) \le 0 \qquad (4)$$

во всех точках x гладкости поверхности Γ.

Теорема Йенсена. Пусть:1) $f(z)$ − непрерывная выпуклая $(0,\infty)$ функция (дважды дифференцируемая на $(0,\infty)$. Функция $f(z)$ является выпуклой на этом интервале тогда и только тогда, когда $f(z) \ge 0,\ \forall Z \in (0,\infty)$; 2) $\Phi(x)$ − непрерывная положительная функция $\forall x \in (0,\infty)$; 3) $\int_Q \Phi(x)dx = 1$; 4) $u(n,x)$ − неотрицательная функция, непрерывная по переменным группы x. Тогда имеет место неравенство

$$\int_Q \Phi(x) f[u(n,x)]dx \ge f\left\{\int_Q \Phi(x)u(n,x)dx\right\}.$$

Это соотношение называют неравенством Йенсена. Доказательства теоремы приведены в работе [1].

Лемма 1. Если выполнено 1) условие (E₁); 2) неравенство $\Delta W_2(n) \le 0$ имеет положительное решение $y(n) > 0\ \forall n \ge n_1$, то $y(n)$ является неубывающей функцией.

Доказательство. Логически возможны следующие допущения (1)

1) $\Delta W_2(n) \le 0\ \forall n \ge n_1$; 2) $\exists n_2 \ge n_1$, $\exists c > 0$ такое, что $W_2(n) < -c < 0$.

Покажем, что второе допущение приводит к противоречию. Действительно,

$$W_2(n) = P_2(n)\Delta W_1(n) \le -c < 0\ \ \forall n \ge n_2 .\ \ P_2(n)\Delta W_1(n) \le -c, \quad \Delta W_1(n) \le -\frac{c}{P_2(n)} .$$

Далее, последнее неравенство, суммируя от n_2 до $n-1$, получим

$$\sum_{m=n_2}^{n-1} \Delta W_1(n) \le -c \sum_{m=n_2}^{n-1} \frac{1}{P_2(m)},$$

$$W_1(n) - W_1(n_2) \le -c \sum_{m=n_2}^{n-1} \frac{1}{P_2(m)},$$

$$W_1(n) \le W_1(n_2) - c \sum_{m=n_2}^{n-1} \frac{1}{P_2(m)} \quad \to \infty \text{ при } n \to \infty .$$

Тогда существует $\exists n_3 \ge n_2$, $\exists c > 0$ такие, что $\forall n \ge n_3$,

$$W_1(n) \equiv P_1(n)\Delta y(n) \le -c, \qquad \Delta y(n) \le -\frac{c}{P_1(n)} .$$

Далее, суммируя от n_3 до $n-1$, получим

$$y(n) \le -\sum_{m=n_3}^{n-1} \frac{1}{P_1(m)} + y(n_3) \to -\infty .$$

Что противоречит положительности функции $y(n)$.

Следовательно, $W_2(n) = P_2(n)\Delta W_1(n) \ge 0 \quad \forall n \ge n_1$, отсюда $\Delta W_1(n) \ge 0 \quad \forall n \ge n_1$. Тогда логически возможны следующие предложения:

1) $W_1(n) \ge 0 \ \ \forall n \ge n_1$; 2) $\exists n_2 \ge n_1$, $\exists c > 0$ такие, что $W_1(n) > c > 0 \quad \forall n \ge n_1$.

Рассмотрим второе предложение: $W_1(n) > c > 0 \ \ \forall n \ge n_1$,

$$W_1(n) \equiv P_1(n)\Delta y(n) > c > 0 \quad \forall n \ge n_2. \qquad \Delta y(n) > \frac{c}{P_1(n)}, \ \forall n \ge n_2.$$

Суммируя последнее неравенство от n_2 до $n-1$, получим

$$\sum_{m=n_2}^{n-1} \Delta y(m) > C \sum_{m=n_2}^{n-1} \frac{1}{P_1(m)} > 0 \ \ \forall n \ge n_2.$$

$$y(n) > C \sum_{m=n_2}^{n-1} q_1(m) + y(n_2) > 0.$$

Отсюда следует, что $y(n) > Cq(n) >> 0 \quad \forall n \ge n_2$, т.е. $y(n)$ – неубывающая функция.

Лемма 2. Если 1) $\sum^{\infty} C(m) = \infty$; 2) выполнено условие ($E_1$); 3) $h(n) \le n, \ \Delta h(n) \ge 0,$

$\forall n \ge n_0$; то для положительного решения $y(n)$ неравенства

$$L_3[y(n)] + C(n)y[h(n)] \le 0 \qquad (2)$$

имеет место равенство $\lim y(n) = 0.$

Доказательство. Допустим, что неравенство (2) имеет положительное решение $y(n) > 0 \quad \forall n \ge n_1$. Далее, рассуждая почти так же, как при доказательстве леммы 1, видно, что $\forall n \ge n_1 \quad W_2(n) \ge 0$ или $W_2(n) \le 0 \quad \forall n \ge n_2$. Из неравенства (2) вытекает, что $W_2(n) \le 0 \ \ \forall n \ge n_2$. Отсюда вытекает, что $y(n)$ –неубывающая функция. $\exists n_3 \ge n_2$ такое, что $\forall n \ge n_3$, $h(n) \ge n_2$ и $\exists \lim y(n) = C \ge 0.$

Предположим, что $C \ne 0$ с учетом этих неравенств из равенства (2) имеем

$$\Delta W_2(n) + C_1 C(n) \le 0 \qquad \forall n \ge n_3.$$

Последнее неравенство, суммируя от n_3 до $n-1$, получим

$$W(n) - W(n_3) + C \sum_{m=n_2}^{n-1} C(m) \le 0 \ \ \forall n \ge n_3.$$

Отсюда, с учетом, что $W_2(n) \ge 0,$ имеем неравенство

$$C_1 \sum_{m=n_3}^{n-1} C(m) \le W_2(n_3) > 0 \qquad \forall n \ge n_3$$

противоречащее условию 1 леммы. Следовательно, предположение $C \ne 0$ приводит к противоречию. Поэтому $\lim y(n) = 0.$

Лемма 3. Если: **1)** выполнено условие (E_0); 2) уравнение (1) имеет неосциллирующее решение $U(n, x) \in (N)$, то неравенство (2) имеет положительное решение.

$$y(n) = (v(n)), \ \ v(n) = \int_Q \Phi(x) U(n, x) dx.$$

Доказательство. Допустим, что уравнение (1) имеет неосциллирующее решение $U(n, x) \in (N)$. Тогда $\exists n_1 \ge n_0$, такое, что $\forall (n, x) \in D_1$; 1) либо $U(n, x) \ge 0$; 2) либо $U(n, x) \le 0.$ Рассмотрим первый случай $U(n, x) \ge 0$ (второй случай приводится к первому подстановкой $Z(n, x) = -U(n, x)$). Зафиксируем число $n_2 \ge n_1$ такое, чтобы $\forall n \ge n_1$ выполнялось неравенство $h(n) \ge n_1$. Тогда $\forall (n, x) \in D_2$ выполняются неравенства

$U(n,x)\ge 0$, $U[h(n,x)]\ge 0.$ Учитывая эти неравенства и условия теоремы, получим неравенства

$$L_3\lfloor U(n,x)\rfloor + [A_1(n,x)-\lambda_0 a(n)]U(n,x) + A_2(n,x)U[h(n),x]\le 0.$$

Умножая его на $\Phi(x)$, интегрируя и учитывая первое следствие формулы Грина для оператора Лапласа, получим неравенство.

$$L_3\lfloor v(n)\rfloor + a_1(n)v(n) + a_2(n)v[h(n)]\le 0.$$

Следовательно, неравенство (2) имеет положительное решение $y(n)=(v(n)).$ Если уравнение (1) имеет положительное решение $U(n,x)\ge 0$, $\forall(n,x)\in D_1$, то $Z(n,x)=-U(n,x)$ является неотрицательным решением уравнения (1).

$$y(n)=\int_Q \Phi(x)Z(n,x)dx=-v(n)$$

будет положительным решением неравенства (2).

Лемма 4. Если 1) выполнено условие (E_0); 2) уравнение (1) имеет неосциллирующее решение $U(n,x)\in(N)$; 3) $a(n)\ge 0\quad \forall n\ge n_1$, то неравенство (2) имеет положительное решение

$$y(n)=|v(n)|,\ v(n)=\int_Q \Phi(x)U(n,x)dx.$$

Теорема 1. Пусть а) выполнены условия $(E_0),(E_1)$; б) $\sum^{\infty}[a_3(m)]=\infty$. Тогда каждое правильное решение $U(n,x)\in(N)$ уравнения (1) либо осциллирует либо $\lim y(n)=0.$

Доказательство. Пусть $y(n)>0$, $\forall n\ge n_1$ положительное решение уравнения (1). Тогда имеет место неравенство (2). Отсюда по лемме 2 вытекает равенство $\lim y(n)=0.$

Теорема 2. Пусть а) выполнены условия $(E_0),(E_1)$; б) $\sum^{\infty}[a_3(m)]=\infty$; с) $a(n)\ge 0$ $\forall n\ge n_0$, то все правильные решения уравнения (1) либо осциллируют, либо $\lim y(n)=0.$

Теорема доказывается почти так же, как и теорема 1.

Доказательство. Допустим, что уравнение (1) имеет неосциллирующее решение. Пусть $y(n)>0\ \ \forall n\ge n_0-$ положительное решение. Тогда имеет место неравенство (2), что на основании леммы 2 вытекает равенство $\lim y(n)=0.$

Лемма 5. Пусть 1)$\sum^{\infty} g_0(m)=\infty$; 2)$\varphi(z)>0-$ непрерывно убывающая функция $\forall Z>0$. Тогда для положительного решения $y(n)$ неравенства

$$L_3[y(n)]+g_0(n)\varphi\{y(n)\}\le 0 \qquad (3)$$

имеет место равенство $\lim_{n\to\infty} y(n)=0.$

Доказательство. Допустим, что неравенство (3) имеет положительное решение $y(n)>0$; $\forall n\ge n_q$. Далее, рассуждая, как в работе [4], показывается, что $\forall n\ge n_1$, $\Delta w_2(n)\le 0.$ Отсюда вытекает следующее, что 1) $y(n)-$ неубывающая функция $\forall n\ge n_2$;2) $\exists \lim_{n\to\infty} y(n)=c>0.$ Предположим, что с $\ne 0$. Тогда $\forall\ n\ge n_1$, $\varphi[y(n)\ge\varphi(c)\equiv C_0>0.$

С учетом этого неравенства из (4) имеем

$$\Delta W_2(n) + C_0 C(n) \leq 0 \qquad \forall n \geq n_1 .$$

Так как $W_2(n) \geq 0 \quad \forall n \geq n_1$, то это неравенство противоречит условию 1) леммы 1. Следовательно, предположения $C \neq 0$ проводит к противоречию. Поэтому $\lim_{n\to\infty} y(n) = 0$.

Лемма 6. Пусть 1) $\sum^{\infty} C(m) = \infty$; 2) $\varphi(z) > 0$ $-$ непрерывно убывающая функция $\forall\, Z > 0$. Тогда для положительного решения $y(n) > 0$, $\forall n \geq n_1$ неравенство

$$L_3[y(n)] - C(n)\varphi[y(n)] \geq 0 \qquad (4)$$

имеет место равенство $\lim_{n\to\infty} y(n) = 0$.

Доказательство. Допустим, что $L_3[y(n)] \geq 0$, $\forall n \geq n_1$. Тогда $W_2(n) -$ неубывающая функция $\forall n \geq n_1$. В этом случае логически возможны только следующие случаи: 1) либо $\exists\, n_2 \geq n_1$ такое, что $W_2(n) \equiv C > 0, \forall n \geq n_2$; 2) либо $W_2(n) \leq 0$, $\forall n \geq n_2$.

В первом случае $\lim_{n\to\infty} y(n) = \infty$. Поэтому рассмотрим второй случай

$$W_2(n) = P_2(n)\Delta W_1(n) \leq 0 \qquad \forall n \geq n_1 ,$$

$W_1(n) -$ невозрастающая функция $\forall n \geq n_1$. Возможны только следующие случаи;

1) либо $\exists\, n_3 \geq n_2$ такое, что $W_1(n_3) = C < 0$; 2) либо $W_1(n) \leq 0, \forall n \geq n_3$.

Предположение 1) противоречит неравенству $y(n) > 0\ \forall n \geq n_1$.

Следовательно, получим неравенство

$$W_1(n) = P_2(n)\Delta y(n) \ \ \forall n \geq n_1 .$$

Из этого вытекает, что неравенство

$$y(n) \geq y_1(n_3) \equiv C, \qquad \varphi[y(n)] \geq \varphi(C) = C_{0,} \ \ \forall n \geq n_3 .$$

С учетом этого неравенства из неравенства (4) имеем

$$\Delta W_2(n) - C_0 C(n) \geq 0 \qquad \forall n \geq n_3 .$$

Далее, суммируя от n_3 до $n-1$, получим

$$w_2(n) \geq w_2(n_3) + c_0 \sum_{m=n_3}^{n-1} c(m) \to +\infty \ \text{ при } \ n \to +\infty,$$

так как $w_2(n) \leq 0$, то это приводит к противоречию.

Теорема 3. Если 1) выполнены условия (E_1), (E_2) и (T_1); 2) $\sum^{\infty} g_0(m) = \infty$. Тогда каждое решение уравнения (1) либо осциллирует либо $\lim_{n\to\infty} v(n) = 0$.

Доказательство. Предположим, что уравнение (1) имеет неосциллирующее решение $u(n,x) \geq 0$. Тогда имеет место либо $u(n,x) > 0$ либо $u(n,x) < 0$. Рассмотрим первый случай (а второй случай приводится к первому), что $u(n,x) > 0\ \forall n \geq n_1 -$ положительное решение уравнения (1). Тогда по лемме 1 и лемме 2 имеет место $\lim_{n\to\infty} y(n) = 0$. Если $u(n,x) \leq 0$, $\forall n \geq n_1$ отрицательное решение уравнения (1). Тогда $y(n) = -v(n)$ удовлетворяет неравенству (1).Отсюда по лемме 1 имеем $0 = \lim_{n\to\infty} y(n) = -\lim_{n\to\infty} y(n) = 0$.

Теорема 4. Если 1) выполнены условия (E_1), (E_2) и T_1. 2) $\sum^{\infty} g_0(m) = \infty$; 3) $\varphi(Z) \geq c = const > 0$, $\forall z > 0$. Тогда каждое решение уравнения (1) либо осциллирует, либо $\lim_{n\to\infty} y(n) = 0$

Доказательство. Предположим, что уравнение (1) имеет не осциллирующее решение $u(n,x)$, тогда $u(n,x)$ либо неотрицательное, либо неположительное. Рассмотрим первый случай (второй приводит к первому подстановкой) $u(n,x) > 0, \forall(n,x) \in D_1$. Зафиксируем число $n_2 \geq n_1$ такое, чтобы $\forall n \geq n_2$ выполнялись неравенства $h(n) \geq n_1, \delta(n) \geq n_{1.}$ Тогда $\forall(n,x) \in D_2$, $u[h(n),x] \geq 0$, $u[\delta(n),x] \geq 0$. С учетом этих неравенств и условий теоремы из тождества (3) вытекает неравенство

$$L_3(y) + c_0 g_0(n) \leq 0, \;\; c = c_0 mesQ.$$

По лемме 1 и лемме 2 имеет $\lim y(n) = 0$. Следовательно, предположение существования неосциллирующего решения уравнения (1) приводит к противоречию, поэтому решение уравнения (1) либо осциллирует, либо $\lim_{n\to\infty} y(n) = 0$.

Теорема 5. Если а) выполнены условия(E_0), (E_1),(T_1); 2) $\sum^{\infty} a_4(m) = \infty$, то каждое решение $v(n)$ уравнения либо осциллирует, либо $\lim_{n\to\infty} v(n) = 0$.

Доказательство. Предположим, что $v(n) > 0$, $\forall\, n \geq n_1$ положительное решение уравнения (1). В этом случае имеет место по определению, что по лемме (2) вытекает равенство $\lim_{n\to\infty} v(n) = 0$.

Теорема 6. Если 1) выполнены условия (E_0), (E_1) и (T_1); 2) $\sum^{\infty} a_4(m) = \infty$; 3) $a(n) \geq 0, \forall\, n \geq n_0$. Тогда каждое решение уравнения (1) либо осциллирует, либо $\lim_{n\to\infty} v(n) = 0$.

Доказательство проводится почти так же, как и доказательство теоремы 5.

Теорема 7 . Пусть 1) выполнены условия(E_0), (E_1), (T_1); 2) $\sum^{\infty} a_4(m) = \infty$; 3) $\varphi(z) > 0$ - неубывающая функция $\forall\, z > 0$. Тогда каждое решение $U(n,x) \in (N)$ уравнения (1) либо осциллирует, либо $\lim|v(n)| = 0$.

Доказательство теоремы проводится почти аналогично доказательству теоремы 5.

Литература

1. Быков Я.В. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями первого порядка. — Фрунзе: Илим, 1985.
2. Быков Я.В., Мерзлякова Г.Д., Шевцов Е.И. Об осциллируемости решений нелинейных разностных уравнений //Дифференциальные уравнения, 1975. — Т. II. —№8.
3. Быков Я.В., Темиров Б.К. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями второго, четвертого и произвольного четного порядков. — Фрунзе: Илим, 1990.

4. Темиров Б.К. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями произвольных нечетных порядков. – Бишкек, 214. – С. 177.

5. Темиров Б.К. Осцилляция решений нелинейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка. // Труды международной конференции «Программные системы: теория и приложения» Института программных систем РАН г. Пересловль-Залесский. –2006. – С.379–387.

6. Харди Н.Г., Литтльвуд Дж.Е. и Полиа Г. Неравенство. – М.: ИИЛ,1948. – 456с.

7. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений.– М.: ГИФМ Л,1962.

8. Темиров Б.К., Баратова Б.Ш.,Тукембаева Г.Ч.,Жамшытбек кызы Айданек, Тургунбекова Ж.Н. Осцилляция решений нелинейного операторно-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка с оператором Лапласа. Научный журнал «Проблемы автоматики и управления». Институт машиноведения и автоматики НАН Кыргызской Республики, ISSN печатной версии:1694-5050 № 2(53): Бишкек, 2025. – С.22–28.