

УДК 519.242

И.Г. Яр-Мухамедов, aldar@email.su

Институт машиноведения, автоматизации и геомеханики НАН КР

ЧЕТЫРЕ ПОДХОДА К ПЛАНИРОВАНИЮ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В статье проанализированы методы планирования экспериментов в рамках четырех подходов: от классического до основанного на решении шахматных задач о ферзях. Показаны достоинства и недостатки рассмотренных подходов. Оценены размерности моделей и мощности множеств опытов в экспериментах исходя из требований, предъявляемых статистическими методами оценивания параметров математических моделей. Сделаны выводы и рекомендован к использованию метод, основанный на задаче о ферзях.

Ключевые слова: планирование эксперимента, метод крутого восхождения, равномерно распределенные последовательности точек, задача о ферзях.

Введение

Планирование эксперимента как самостоятельную дисциплину принято рассматривать начиная с работы Фишера [1], заложившего качественную определенность ее понятий и подходы к получению количественных оценок от этапа планирования до этапа интерпретации результатов эксперимента.

Под планированием эксперимента обычно понимают процедуру выбора числа опытов и условий их проведения. При этом предполагается, что эксперимент должен привести к достижению поставленной цели с требуемой точностью [2, 3]. Области использования методов планирования эксперимента непрерывно расширяются. Трудно определить направления исследований и разработок, где элементы этой дисциплины не находили бы применение [4, 5, 6].

Цель статьи: выявить подходы и методы, которые наилучшим образом соответствовали бы целям и возможностям конкретных исследований в части выработки оптимальных планов экспериментов. При этом будем исходить из положения, что заданные исследователем цели определяют один или несколько равноценных оптимальных планов. Сразу отметим, что наличие таких планов никак не зависит от методов их получения. Если метод применим к конкретной задаче, то его применение приведет нас к искомому решению. По этой причине сравнивать методы по свойствам решений некорректно. Оптимальные решения будут обладать одинаковыми свойствами (покрытия, дисперсии и т.д.), так как это одни и те же решения.

Сравнивать можно было бы сами методы, но здесь наши возможности очень ограничены. Дело в том, что сам исторический процесс развития методов планирования эксперимента сопровождался постепенным выявлением и устранением недостатков, учетом дополнительных требований и уточнением целей. При этом они не всегда формулировались явно, а тем более – формально-математически. Достаточно напомнить, что многие работы прошлого века в качестве основной части содержали таблицы с планами экспериментов. В этих условиях попытки сравнения приводят к необходимости домысливания целого ряда моментов, которые могут не соответствовать действительным соображениям авторов методов. А это некорректно. Поэтому мы будем ограничиваться лишь упоминанием достоинств и недостатков рассматриваемых методов планирования эксперимента.

В данной работе мы вкратце рассмотрим классические методы планирования эксперимента, для которых характерно четкое разделение во времени собственно планирования и проведения эксперимента. Затем остановимся на поисковых методах, где этапы планирования, проведения опыта и анализа его результатов повторяются многократно, образуя цепочку, ведущую к экстремуму целевой функции.

Для чисто вычислительных машинных экспериментов существует метод зондирования пространства параметров с помощью равномерно распределенных последовательностей точек. Для планирования реальных экспериментов предложен похожий метод на основе

задачи о восьми ферзях. Обоснованы и представлены характеристики планов для различного количества факторов.

Классические методы планирования эксперимента

К классической группе мы отнесем методы и планы, для которых характерно четкое отделение во времени этапа планирования. Он предшествует и полностью завершается до начала проведения эксперимента и анализа его результатов. Сюда мы можем отнести: полные факторные планы; дробные факторные планы; планы, получаемые с помощью симплекс-метода; неполные факторные планы.

Полные факторные планы характеризуются наличием всех возможных комбинаций уровней всех факторов. С одной стороны, им присуща максимальная информативность, но с другой – количество опытов в таком плане оказывается чрезмерно большим (количество уровней факторов, возведенное в степень, равную количеству факторов). По этой причине полные многофакторные планы оказываются нереализуемыми даже при незначительном количестве уровней значений факторов.

Дробные факторные планы появились как компромисс между информативностью и мощностью множества опытов в плане эксперимента. Они включают лишь часть опытов соответствующего полного факторного плана (половину, четверть, восьмую часть и т.д.). Основной эффект дробления проявляется в невозможности получения оценок некоторых взаимодействий факторов, непосредственно зависящей от выбора опытов, включаемых или исключаемых из состава реплики.

В некоторых случаях могут представлять интерес так называемые насыщенные планы. Они характеризуются минимальным количеством опытов. При этом количество параметров модели равно количеству опытов. В этом случае статистический подход к оценке закономерных связей применим лишь в ограниченном объеме, в случае, если некоторые факторы или их комбинации окажутся незначимыми. Одним из методов получения насыщенных планов является симплекс-метод. Симплексом называют выпуклую фигуру с количеством вершин, на единицу превышающим размерность пространства. Симплекс обычно строят по нормированным данным уровней значений факторов симметрично относительно начала координат.

И, наконец, неполные факторные планы, минимальные по количеству опытов, но достаточные для уверенного выявления закономерных связей. Одно из правил, позволяющих строить такие планы, заключается в том, что в рамках плана обеспечивается минимально требуемая и равная для всех факторов повторность значений уровней факторов. Один из вариантов этого подхода описан в [7]. Требования к плану эксперимента сформулированы так, чтобы в каждая комбинация уровней для любой пары факторов встречалась одинаковое количество раз во всех экспериментальных запусках.

Поисковые методы планирования эксперимента

Для методов данной группы характерно многократное последовательное повторение процедуры, включающей планирование опыта, проведение эксперимента, анализ результатов. Эксперименты завершаются, когда после анализа результатов очередного опыта исследователь приходит к выводу, что искомый результат получен.

Одним из первых поисковых методов был метод, основанный на использовании симплексов. На первоначальном этапе строится симплекс-план и производится серия опытов. Затем выбирается точка (вершина симплекса), которой соответствует наихудшее значение оптимизируемой функции (функции отклика) и рассчитывается новая вершина со стороны, противоположной наихудшей точке. Для нее проводится эксперимент и по результатам анализа либо прекращается поиск, либо строится новая вершина в направлении, противоположном следующей наихудшей точке.

Достоинства этого метода в том, что: симплекс описывает минимальное количество опытов для выбранной модели; пошаговая модификация и перемещение симплекса

позволяют определить экстремум функции отклика. Недостаток заключается в том, что процедура поиска далеко не оптимальна.

Оптимальными принято считать методы, основанные на использовании градиента функции отклика. Есть множество вариантов и модификаций градиентного подхода к планированию серии последовательных экспериментов. Суть сводится к: определению направления наиболее крутого возможного восхождения [2] (или спуска, если ищется минимум) по поверхности функции отклика; выбора шага изменения значений факторов в выбранном направлении. В найденной точке предполагаемого экстремума повторяется процедура вычисления градиента и последующих действий, включая проведение опыта и оценку его результатов совместно с результатами предшествующих опытов на предмет достижения поставленных целей и завершения эксперимента.

При всех достоинствах градиентных методов им свойственны и недостатки. Если при использовании симплексов координаты вершин выбираются исходя из технических, технологических и прочих возможностей и ограничений, а при перестроениях градиации уровней сохраняются, то в градиентных методах попытки учесть разнообразные ограничения натуральных опытов могут существенно искажать оптимальные (с точки зрения процедур поиска) уровни факторов, а значит и направления. Это может существенно нивелировать достоинства градиентных методов планирования эксперимента. Отметим, что это не относится к планированию чисто вычислительных экспериментов.

И, наконец, любые поисковые методы планирования имеют целый ряд существенных недостатков, проистекающих из их последовательной природы.

Во-первых, если при классическом подходе все опыты могут проводиться параллельно, то поисковые методы не позволяют этого сделать. Например, в сельском хозяйстве эксперимент вместо одного года может занять десять лет. Наверняка это мало кого может устроить.

Во-вторых, временной разрыв между опытами может вводить в эксперимент целый набор новых неконтролируемых факторов. В сельском хозяйстве это могут быть различия в температурах, осадках, солнечной радиации и т.д. А ведь одной из важнейших предпосылок успешного проведения экспериментов и продуктивной интерпретации их результатов является неизменность прочих условий.

В-третьих, в поисковых методах рассматривается только один критериальный показатель. На самом деле в любом эксперименте требуется находить компромиссный вариант, учитывающий несколько важных характеристик искомого решения. Опять остановимся на сельском хозяйстве. Для пшеницы важны урожайность, содержание ряда полезных веществ, сохраняемость урожая в определенных условиях, стойкость к болезням, пригодность и эффективность существующих технологий и т.п. Для каждого из подобных показателей требуется реализовывать процедуры поиска, проведения опытов, анализа результатов. Получается, что вместо одного эксперимента, включающего последовательность опытов, требуется осуществить множество экспериментальных последовательностей. При этом остается открытым вопрос выявления компромиссного решения.

Перечисленные недостатки обусловлены смешением двух принципиально различных задач: задача разработки оптимального плана эксперимента подменяется задачей поиска экстремума функции отклика. По этой причине и план неоптимален, и критерий всего один. Но это не значит, что поисковый подход не может иметь своей ниши эффективного применения.

Планирование эксперимента с использованием равномерно распределенных последовательностей точек

Как отмечается в [8], отличительная черта метода выбора оптимальных параметров в задаче со многими критериями – в систематическом просмотре многомерных областей: в качестве пробных точек в пространстве параметров используются точки равномерно

распределенных последовательностей. Использование таких точек (комбинаций значений факторов) позволяет: равномерно аппроксимировать всю область определения задачи; построить области значений; идентифицировать связи между областями определения и значений; учесть множественность критериев.

Предложенные в [8] планы экспериментов являются оптимальными с различных точек зрения. Однако они применимы только к численным вычислительным экспериментам. По очевидным причинам их невозможно непосредственно использовать при планировании натурных экспериментов. В частности, шкала измерений значений факторов является непрерывной и количество уровней оказывается равным количеству опытов. Такая ситуация никак не соответствует исходным положениям классического планирования экспериментов. Как, например, обеспечить хотя бы пять уровней внесения удобрения, если из-за неизбежной неравномерности его распределения по площади делянки ошибка может достигать десятков процентов?

Несмотря на это, особенности подхода и свойства множества равномерно распределенных точек могут быть успешно применены для планирования реальных экспериментов. В частности, осуществив разбиение области определения каждого из факторов на интервалы, соответствующие требуемым уровням значений факторов и выбрав количество точек так, чтобы обеспечить равные повторности при технической, технологической и экономической реализуемости плана, можно было бы получить вполне приемлемые планы реальных экспериментов.

Планирование эксперимента и задача о восьми ферзях

Решения задачи о восьми ферзях [9] имеют особенности, сходные как с равномерно распределенными точками в многомерном пространстве, так и с усеченными планами. Кроме того, их свойства привлекательны с точки зрения применения статистических методов и, в частности, методов регрессионного анализа.

Свойства решения описываются следующими ограничениями: в каждой вертикали и в каждой горизонтали имеется одна фигура; на каждой из диагоналей имеется одна фигура; каждая из восьми фигур не находится под ударом и не угрожает никакой другой.

Применительно к планированию экспериментов решение задачи о ферзях соответствует двухфакторным планам с восемью уровнями значений факторов. В классической теории планирования экспериментов столь большое количество уровней не рассматривается. Тем не менее для поисковых методов весьма возможно использование и большего количества уровней.

Поскольку для нас крайне желательно обеспечить параллельность проведения опытов в эксперименте, рассмотрим требуемое количество уровней для определения экстремума некоторой функции отклика.

Два уровня значений факторов – базовое условие для поиска, но оно не позволяет выявить экстремум. Кроме того, даже оценить направление, где он находится, не представляется возможным. Например, если экстремум находится на некотором промежуточном уровне. По этой причине двухуровневый случай мы не будем рассматривать.

Три уровня значений факторов – хороший, но не наилучший вариант. Он позволяет определить экстремум. Но этот экстремумотягчен ошибками. Это – стопроцентная аппроксимация. Несмотря на то, что повторность опытов в эксперименте снижает дисперсии оценок, трудно говорить о закономерной связи или ее точности.

Четыре уровня значений факторов. В этом случае количество значений факторов на единицу превышает количество параметров в полиноме второго порядка, необходимом для вычисления экстремума, а наличие хоть и минимального превышения является существенным условием применения статистических методов. Данная ситуация допускает выдвижение определенных утверждений о связях и зависимостях между факторами и критериями.

Еще одно замечание, касающееся количества опытов и количества параметров модели. Мы рассматриваем нелинейные модели. Однако для применения, например, классического метода наименьших квадратов, требуется линеаризация модели. Полиномы обычно линеаризуются методом замены переменных. При этом количество параметров в линеаризованной модели остается прежним, тем же, что и в нелинейной модели. Поэтому в дальнейшем мы будем говорить о количестве идентифицируемых параметров исходя из применяемого метода их идентификации, предполагая, что модель линеаризована.

В задаче о ферзях минимальный размер доски, допускающий требуемое решение, равен четырем. Такое решение описывается четырьмя опытами при наличии двух факторов и четырех уровнях каждого из факторов. Полный полином второй степени от двух переменных имеет шесть параметров:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + cx_1x_2.$$

Здесь: y – зависимая переменная (критерий); x_1, x_2 – переменные, соответствующие факторам; $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c$ – искомые коэффициенты модели.

Для нахождения экстремума этой функции требуется найти решение задачи планирования, характеризующееся двукратным повторением каждого из значений уровней каждого из факторов. В этом случае количество опытов оказывается равным восьми, что на две единицы превышает количество параметров в модели. Такой план мы можем считать оптимальным.

Для трех- и четырехфакторных экспериментов ориентиром могут служить решения задач, описанных в [10, 11, 12]. В них рассматриваются ситуации "объемных" досок с размерностью более двух. Свойства решений таких задач являются многомерным обобщением свойств обычной задачи о ферзях. Для нас имеет смысл рассмотреть повторность опытов с одинаковыми значениями уровней факторов.

Задаче с тремя факторами при четырех уровнях значений соответствует модель в виде полного полинома второй степени от трех переменных. Она отличается от описанной выше наличием линейной и квадратичной компонент для третьего фактора, а также дополнительными компонентами, учитывающими совместное влияние пар из первого и второго, первого и третьего, второго и третьего факторов:

$$y = a_0 + a_1x_1 + b_1x_1^2 + a_2x_2 + b_2x_2^2 + a_3x_3 + b_3x_3^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + c_{23}x_2x_3.$$

Кратко остановимся на связи между количеством факторов в многофакторной модели в виде полного полинома второго порядка и количеством параметров полинома, подлежащих идентификации на основе опытов плана эксперимента. Обозначим количество факторов через k , а количество параметров (коэффициентов) модели – через m . Тогда связь между ними может быть проиллюстрирована таблицей 1.

Таблица 1 – Количество параметров в многофакторных моделях второго порядка

	Количество факторов				
	2	3	4	5	6
Количество членов нулевой степени	1	1	1	1	1
Количество членов первой степени	2	3	4	5	6
Количество членов второй степени	2	3	4	5	6
Количество смешанных членов второй степени	1	3	6	10	15
Общее количество параметров	6	10	15	21	28

Формула для расчета количества параметров модели в виде полного полинома второго порядка имеет следующий вид:

$$m = (k + 1)(k + 2) / 2.$$

Следует отметить, что в некоторых работах в состав полиномов первого порядка включают смешанные члены (второй порядок), а в состав полных полиномов второго порядка – смешанные члены третьего порядка. Мы будем придерживаться строгой трактовки

и ограничимся только членами второго порядка, минимально необходимыми для поиска экстремумов.

Напомним, что если опытов будет меньше, чем параметров модели, то невозможно однозначно идентифицировать параметры. При равенстве этих величин решение является единственным. Если же количество опытов превышает количество параметров, то решение в общем случае является статистическим (усредненным).

Поскольку количество параметров равно десяти, при четырех уровнях значений факторов необходимо обеспечить трехкратное повторение значений уровней для каждого из факторов. В этом случае количество опытов составит двенадцать, что на две единицы превышает количество параметров. При необходимости в модель может быть включен еще один член, учитывающий совместное влияние всех трех факторов. Такая модель является вполне допустимой с точки зрения применения методов регрессионного анализа для идентификации параметров на основе данных рассмотренного плана.

Полный полином от четырех переменных включает в свой состав пятнадцать коэффициентов. Следовательно, четырехфакторный план с четырьмя уровнями значений факторов должен включать в себя хотя бы шестнадцать опытов. Это значит, что каждый из уровней факторов будет встречаться в плане четыре раза. При необходимости учета взаимодействий свыше второго порядка, количество опытов должно быть увеличено до двадцати (пятикратная повторяемость значений).

Повторность значений уровней факторов не означает повторности опытов в эксперименте. Каждый из опытов должен быть уникальным. Это легко проиллюстрировать следующими планами двухфакторных экспериментов с четырьмя уровнями значений факторов. В первом нет повторностей, во втором – двукратная повторность значений. В третьем – трехкратная. Планы представлены псевдографически в виде шахматных досок на рисунке 1.

Первый План			
	Q		
			Q
Q			
		Q	

Второй план			
Q	Q		
		Q	Q
Q	Q		
		Q	Q

Третий план			
	Q	Q	Q
Q	Q		Q
Q		Q	Q
Q	Q	Q	

Рисунок 1 – Двухфакторные планы с различными значениями повторностей

Сразу отметим, что второй и третий планы иллюстрируют повторность уровней, но это не значит, что они оптимальны по любому из критериев, использовавшихся в упомянутых выше работах.

Третий план может рассматриваться как проекция фигур (опытов) на одну из граней трехмерной задачи о ферзях, соответствующей трехфакторному эксперименту с четырьмя уровнями значений факторов и трехкратным повторением значений уровней в опытах.

Методы разработки планов на основе предложенного подхода

Для решения задачи о ферзях чаще всего используются различные модификации переборных методов с возвратом. Они, несомненно, опираются на свойства искомого решения и позволяют получать, при необходимости, все множество решений. Но для нас проще модифицировать требования, не затрагивая самих алгоритмов. Поэтому ограничимся декларативными математическими описаниями. Будем формулировать их в понятиях задач целочисленного линейного программирования с логическими переменными [13]. Математическая нотация аналогична использованной в [14].

Уточним требования на содержательном уровне. Поскольку требуется строить многофакторные модели второго порядка, то необходимо, как минимум, обеспечить выполнение требований двумерной задачи о ферзях для каждой из двумерных "досок" в

многомерном кубе. Разбор будем вести для трехмерного случая. Введем следующие обозначения:

n – линейная размерность "доски" – количество уровней каждого из факторов;

Q_{xyz} – логическая переменная, единичное значение которой означает, что место расположения ферзя описывается координатами x , y и z . каждая из которых может принимать значения от одного до n .

Целевая функция имеет смысл количества ферзей и должна быть максимизирована:

$$\sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^n \sum_{z=1}^n Q_{xyz} \rightarrow \max.$$

В каждой строке по каждой из координат должно быть не более одного ферзя:

$$\sum_{x=1}^n Q_{xyz} \leq 1, \quad y = \overline{1, n}, z = \overline{1, n};$$

$$\sum_{y=1}^n Q_{xyz} \leq 1, \quad x = \overline{1, n}, z = \overline{1, n};$$

$$\sum_{z=1}^n Q_{xyz} \leq 1, \quad x = \overline{1, n}, y = \overline{1, n}.$$

На диагоналях должно быть не более одного ферзя:

$$\sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^n Q_{xyz} \leq 1, \quad x + y = k, k = \overline{2, 2n}, z = \overline{1, n};$$

$$\sum_{x=1}^n \sum_{z=1}^n Q_{xyz} \leq 1, \quad x + z = k, k = \overline{2, 2n}, y = \overline{1, n};$$

$$\sum_{y=1}^n \sum_{z=1}^n Q_{xyz} \leq 1, \quad y + z = k, k = \overline{2, 2n}, x = \overline{1, n}.$$

Это же касается и диагоналей с противоположным наклоном:

$$\sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^n Q_{xyz} \leq 1, \quad x - y = k, k = \overline{1 - n, n - 1}, z = \overline{1, n};$$

$$\sum_{x=1}^n \sum_{z=1}^n Q_{xyz} \leq 1, \quad x - z = k, k = \overline{1 - n, n - 1}, y = \overline{1, n};$$

$$\sum_{y=1}^n \sum_{z=1}^n Q_{xyz} \leq 1, \quad y - z = k, k = \overline{1 - n, n - 1}, x = \overline{1, n}.$$

И, наконец, ограничения на значения самих искомым переменных:

$$Q_{xyz} \in \{0, 1\}, \quad x = \overline{1, n}, y = \overline{1, n}, z = \overline{1, n}.$$

С помощью вышеописанной модели получено решение, представленное на рисунке 2.

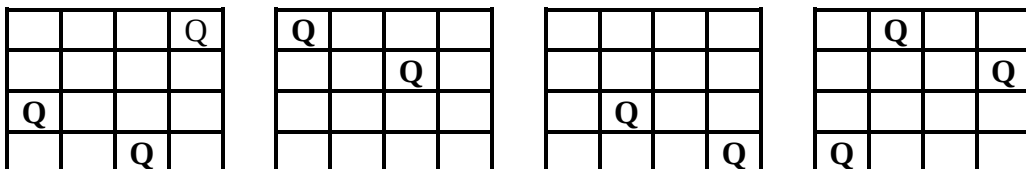


Рисунок 2 – Горизонтальные срезы пространства решений трехмерной задачи

В полученном плане эксперимента имеется десять опытов. Полный полином второго порядка от трех переменных имеет десять параметров. Следовательно, представленный план является минимальным для идентификации такой модели (насыщенный план). К

полученному минимальному плану могут быть применены статистические методы, если хотя бы одна из компонент модели окажется незначимой.

При необходимости количество опытов в эксперименте может быть увеличено путем внесения изменений в правые части ограничений. Их изменение желательно производить только для факторов, представляющих наибольший интерес.

При введении повторений в значениях уровней факторов или повышении размерности пространства факторов имеет смысл вводить ограничения на количество опытов в двумерных пластах или "досках". Таким образом можно повысить равномерность распределения опытов.

Если требуется решить задачу на фиксированное количество повторов уровней факторов, то имеет смысл переформулировать задачу на поиск минимального количества опытов при сохранении части ограничений прежней задачи.

Таким образом процесс получения плана состоит из четырех шагов; формулировка требований к плану; трансформация требований в задачу линейного программирования; решение задачи; интерпретация решения. Адаптация и модификация планов осуществляются при формулировании требований, которые затем находят отражение в системе ограничений.

Новизна предлагаемого подхода к планированию экспериментов заключается в следующем. Во-первых, явно задаются свойства требуемого плана. Во-вторых, задача планирования описывается декларативно как задача целочисленного линейного программирования. В-третьих, при правильной формулировке задачи гарантированно получается оптимальный план. В-четвертых, явная связь между целями и условиями задачи и полученным решением облегчает процессы интерпретации плана и, при необходимости, корректировки условий задачи.

В дополнение к изложенному следует добавить, что исследователи многомерных задач обнаружили, что трехмерная задача о ферзях имеет решение (на доске $3 \times 3 \times 3$). Следовательно вполне возможно построение трехфакторного плана при трех уровнях значений факторов.

Заключение

В данной работе были проанализированы четыре подхода к построению планов экспериментов, рассмотрены их достоинства и недостатки. Показано, что кажущиеся наиболее прогрессивными методы, основанные на вычислении градиентов или их оценок, на самом деле имеют существенные недостатки, что обусловлено наличием определенных противоречий между сутью методов поиска экстремума, возможностями проведения эксперимента и многокритериальностью исследовательских и конструкторских задач. По этим причинам исключено их применение в целом ряде случаев,

К сожалению отсутствуют примеры использования равномерно распределенных последовательностей точек для планирования натуральных экспериментов. Возможно, что сегментация области определения и преобразование шкал могут оказаться продуктивным средством адаптации метода для целей формирования планов.

Предложенный метод планирования экспериментов на основе задачи о ферзях представляется наиболее приемлемым. С одной стороны, он учитывает основные требования к решениям, сформулированные в методах, относящихся к другим подходам, а также может учитывать и специфические, свойственные конкретной задаче исследования. С другой – вполне удовлетворяет условиям использования статистических методов, что позволяет в результате их применения получать решения с малой дисперсией оценок коэффициентов регрессионных моделей. Методы линейного программирования гарантируют получение решений (планов), оптимальных с точки зрения заданных условий.

Четвертый подход можно интерпретировать следующим образом. Область допустимых решений – полный факторный эксперимент. Вводя простые и понятные, подчас очевидные требования к свойствам оптимального плана в виде ограничений, мы отсекаем не удовлетворяющие им планы. Варьируя ограничения, мы можем уточнить наши целевые установки и получить требуемый оптимум. Другие подходы не предоставляют нам такие

возможности, по крайней мере, в полном объеме. Именно в этом и заключается главное достоинство предложенного подхода к планированию экспериментов.

Литература

1. Fisher R. A. The Arrangement of Field Experiments / R. A. Fisher // Journal of the Ministry of Agriculture of Great Britain. – 1926. – № 33. – p. 503-513.
2. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – М.: Наука, 1976. – 279 с.
3. Nelson P. The Sequential Nature of Classical Design of Experiments / P. Nelson. <https://prismtc.co.uk/resources/blogs-and-articles/the-sequential-nature-of-classical-design-of-experiments>. (Дата обращения: 22.07.26).
4. Чирягов А.К., Корякин С.В., Карабакиров К.Р. Методологические основы построения устойчивых моделей машинного обучения с использованием вероятностно-статистических методов / А.К. Чирягов, С.В. Корякин, К.Р. Карабакиров // Проблемы автоматизации и управления. – 2026, – №1(55) – С. 152-161.
5. Куримкулова Г.К., Аскалиева Г.А., Пресняков К.А. Идентификация режимных параметров реки Теджен / Г.К. Куримкулова, Г.А. Аскалиева, К.А. Пресняков // Проблемы автоматизации и управления. – 2025, – №2(53) – С. 8-15.
6. Казанцев М.Р., Верзунов С.Н. Методологические подходы к оценке влияния автотранспорта на состояние атмосферного воздуха в городе Бишкеке / М.Р. Казанцев, С.Н. Верзунов // Проблемы автоматизации и управления. – 2025, – №2(53) – С. 74-87.
7. Plackett R.L., Burman J.P. The Design of optimum multifactorial Experiments / R.L. Plackett, J.P. Burman // Biometrika, Volume 33, Issue 4, June 1946, – p. 305–325, <https://doi.org/10.1093/biomet/33.4.305> (Дата обращения: 22.07.26).
8. Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И.М. Соболев, Р.Б. Статников. – М.: Наука, 1981. – 110 с.
9. Hoffman E., Loessi J., Moore R. Constructions for the Solution of the m Queens Problem / E.J. Hoffman, J.C. Loessi, R.C. Moore // Mathematics Magazine, Vol. 42. No. 2, Mar., 1969. – p. 66-72.
10. Barr J., Rao S. The n-Queens Problem in Higher Dimensions / J. Barr, S. Rao // Elemente der Mathematik, – 2006, 61 (4), – p. 133-137. <https://doi.org/10.48550/arXiv.0712.2309> (Дата обращения: 15.07.25)
11. Pearson C.S., Pearson M.S. Beyond Two Dimensions / C. S. Pearson, M. S. Pearson. <https://lyndenlea.uk/nqueens/beyond2d.php> (Дата обращения: 15.07.26)
12. On Our Adventures In 2 and 3 Dimensions With The N-Queens On An N x N (x N) Chessboard Puzzle. <https://queens.cspea.co.uk/> (Дата обращения: 15.07.26)
13. Makhorin A. QUEENS, a classic combinatorial optimization problem / A. Makhorin. <https://fossies.org/linux/misc/glpc-5.0.tar.gz/glpc-5.0/examples/queens.mod> (Дата обращения: 15.07.26).
14. Letavec C., Ruggiero J. The n-Queens Problem / C. Letavec, J. Ruggiero // INFORMS Transactions on Education – 2002, 2(3). – p. 101-103. <https://doi.org/10.1287/ited.2.3.101> (Дата обращения: 15.07.26).